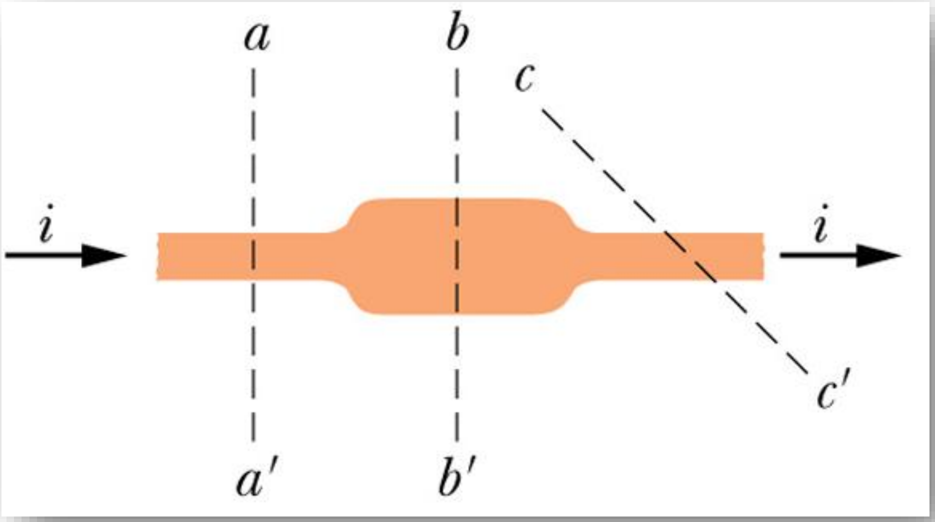
La corrente elettrica nel filo conduttore

Si definisce intensità di corrente elettrica, o più semplicemente **corrente, la quantità di carica che attraversa la sezione di un file conduttore nell'unità di tempo:**



$$i = \frac{dq}{dt}$$

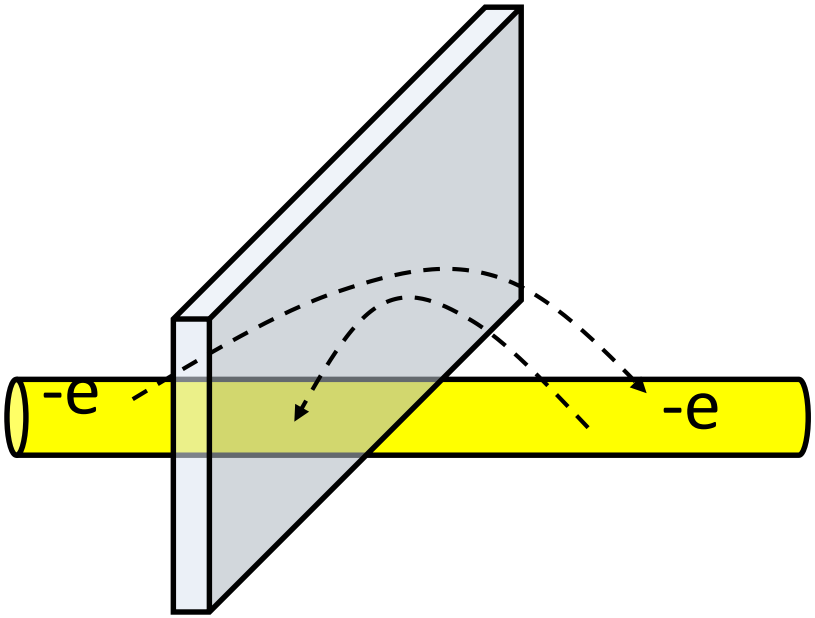
Inversamente dalla corrente si può ricavare la carica come:

$$q = \int_0^t dq = \int_0^t i\,dt$$

Assumiamo che in ogni punto interno al filo conduttore la densità di carica sia la stessa; ne deriva il **principio di stazionarietà**: **la corrente è la stessa in ogni punto del filo conduttore**; dunque la carica che attraversa nell'unità di tempo la sezione aa' è la stessa che attraversa bb', altrimenti ci sarebbe un accumulo di carica nella regione compresa tra aa' e bb'

La corrente elettrica nel filo conduttore

ATTENZIONE: non è sufficiente definire la corrente come CARICA in MOTO: a livello microscopico le cariche in un materiale sono sempre in moto, ma non per questo si genera corrente. **Affinché ci sia corrente deve esserci un FLUSSO NETTO di carica attraverso una superficie**



Ad esempio, gli elettroni all'interno di un conduttore (ad esempio un filo di rame) si muovono in modo casuale con velocità $\sim 10^6$ m/s; ma se intersechiamo il filo con un piano non misuriamo alcuna corrente: in media avremo tanti elettroni che attraversano il piano in un senso quanti nell'altro verso. Al netto, non c'è flusso di elettroni. Solo collegando il filo ai capi di una batteria si genererà un flusso netto, poiché gli elettroni saranno spinti da una forza elettromotrice diretta dal polo negativo della batteria a quello positivo.

Unità di misura

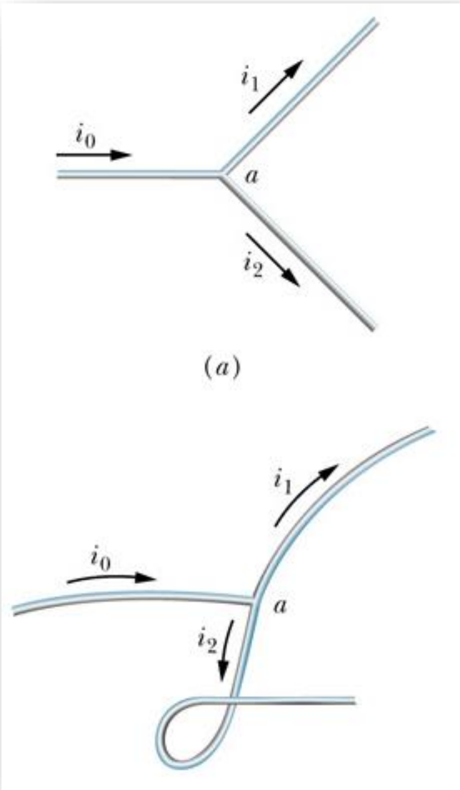
Fisico, matematico, e chimico francese, André-Marie Ampère (1775-1836) rivelò precoce talento matematico e memoria straordinaria. Suo padre era un giudice e fu ghigliottinato nel 1793. Stabilì le relazioni tra elettricità e magnetismo

- ✓ L'unita di misura dell'intensità di corrente nel Sistema Internazionale è l'**Ampere (A),** dal nome dello scienziato francese André Marie Ampère.
- ✓ Possiamo dire che in un conduttore circola la corrente di 1 A quando attraverso una sezione del conduttore passa la carica di 1 *C* al secondo.
- ✓ Analogamente, possiamo dire che il Coulomb è la quantità di carica elettrica che passa nel tempo di 1 s in un conduttore percorso da 1 *A* di corrente elettrica

$$[I]=\frac{[Q]}{[\Delta t]}=\frac{1C}{1s}=1A$$

Esempi di amperaggio: una porta USB 2.0 eroga 0.5 A di corrente; un caricatore per smartphone raggiunge 1 A, mentre quelli per Tablet circa 2 A; la corrente di picco erogata nelle abitazioni è di 16 A.

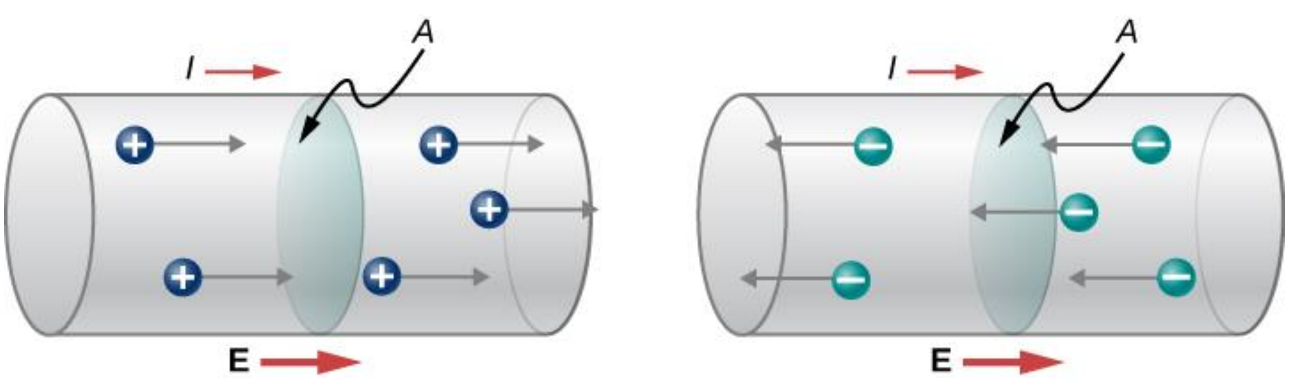
La corrente elettrica è una quantità scalare



- ✓ La corrente elettrica è una **quantità scalare**, non confonda il fatto che è disegnata con una freccia che ne indica il verso; due correnti che confluiscono o provengono da un solo ramo si sommano come scalari, non come vettori:

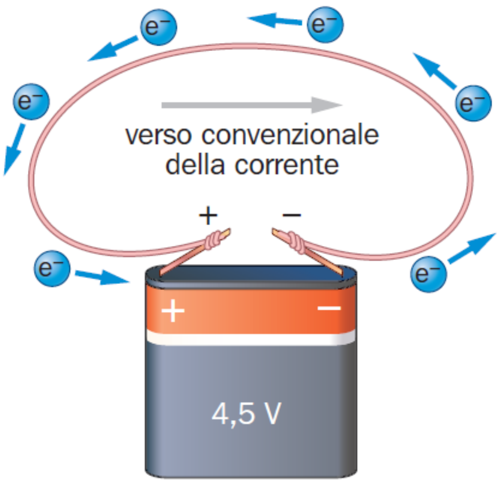
$$i_0 = i_1 + i_2$$

- ✓ Il punto di congiunzione di due o più rami di circuito si dice **NODO**
- ✓ Il verso indicato dalla freccia convenzionalmente **indica la direzione delle cariche positive**, anche se in realtà sappiamo che nei conduttori sono gli elettroni di conduzione a muoversi



il verso convenzionale della corrente è quello delle cariche positive

Corrente continua e alternata

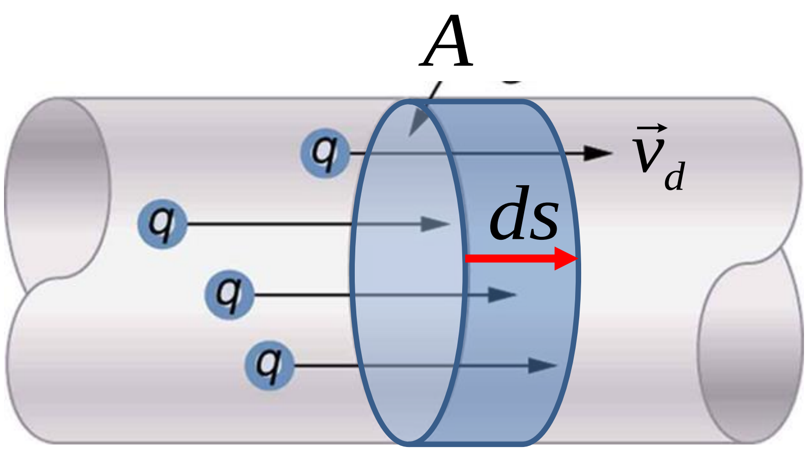


Per convenzione si e stabilito che la **corrente elettrica è un flusso di cariche positive che si muovono dal polo positivo (cioè quello a potenziale maggiore) al polo negativo**; in realtà, nei conduttori metallici si muovono gli elettroni di conduzione, che quindi vanno dal polo negativo al polo positivo.

- ✓ Quando in un circuito elettrico la corrente fluisce sempre nella stessa direzione si dice che è **corrente continua.** Le **pile e le batterie** sono **generatori che producono corrente continua**. Sugli apparecchi elettrici la corrente continua è indicata con la sigla DC (–), dall'inglese "direct current".
- ✓ In alcune situazioni (ad esempio nel caso di trasmissione di energia elettrica a distanza) è però più conveniente utilizzare la **corrente alternata**, che ha la caratteristica di **invertire con periodicità il verso.** Per esempio **la corrente che circola nella rete elettrica** è alternata, ed inverte il verso di percorrenza da I=+16 A a I=-16 A per 50 volte al secondo (ovvero lavora a 50 Hertz di frequenza). La corrente alternata è indicata con la sigla AC (~), ovvero "alternating current".

La corrente come flusso di carica

- ✓ quando ai capi di un filo conduttore si applica una d.d.p., gli elettroni di conduzione acquistano una **direzione netta di spostamento**
- ✓ la velocità v_d con cui avviene questo moto collettivo si dice velocità di "**trascinamento**", o di "**deriva**" (in inglese velocità di "**drift**")
- ✓ Sia n la densità di elettroni di conduzione (numero di particelle per unità di volume); calcoliamo la **carica elettrica che attraversa la superficie A nell'unità di tempo**



Lo spazio percorso dalle cariche nel tempo infinitesimo dt è

$$ds = v_d \, dt$$

nel tempo dt la carica ha riempito il volume blu in figura, per cui la quantità di carica che ha attraversato la sezione A del conduttore è:

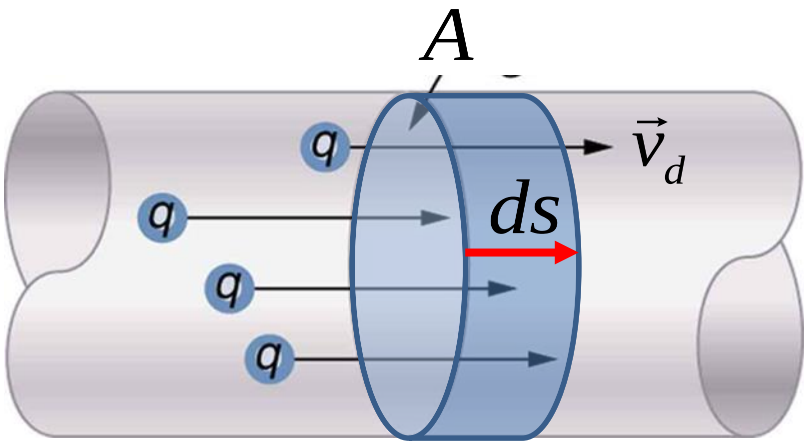
$$dq = n e (A v_d dt)$$

$$\Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = n e A v_d$$

La corrente come flusso di carica

Introduciamo il vettore areale *d**A*** perpendicolare alla sezione del conduttore, di verso concorde con il moto delle cariche positive, uguale in modulo all'area della sezione; la corrente elettrica può scriversi in forma del tutto generale come:

$$i = n e \int_A \vec{v}_d \cdot d\vec{A}$$



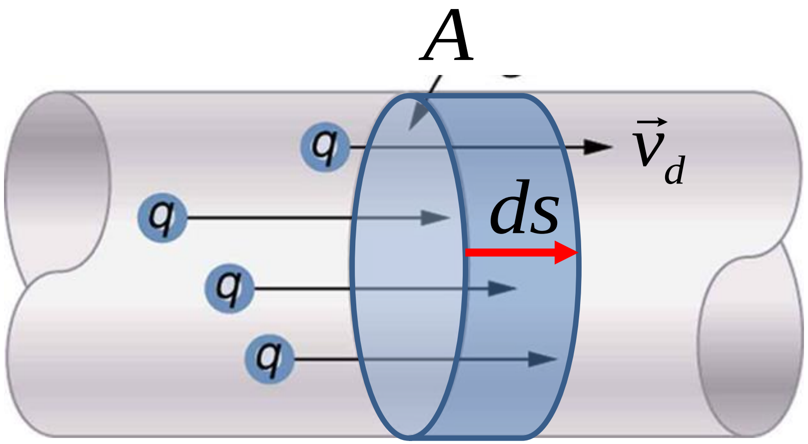
Dunque la **corrente elettrica è il flusso delle cariche elettriche attraverso il conduttore**, ovvero la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore nell'unità di tempo

nel caso ipotizzato in cui v_d sia uniforme in tutti i punti della sezione, si ritrova:

$$i = n e A v_d$$

La densità di corrente

Possiamo rendere la definizione di corrente più sintetica introducendo il vettore **densità di corrente *J***, diretto come la velocità della carica, e per convenzione concorde con il moto delle cariche positive:



$$\vec{J} = n e \vec{v}_d$$

Da cui si ottiene che la corrente può esprimersi come **flusso di *J* attraverso la sezione del conduttore:**

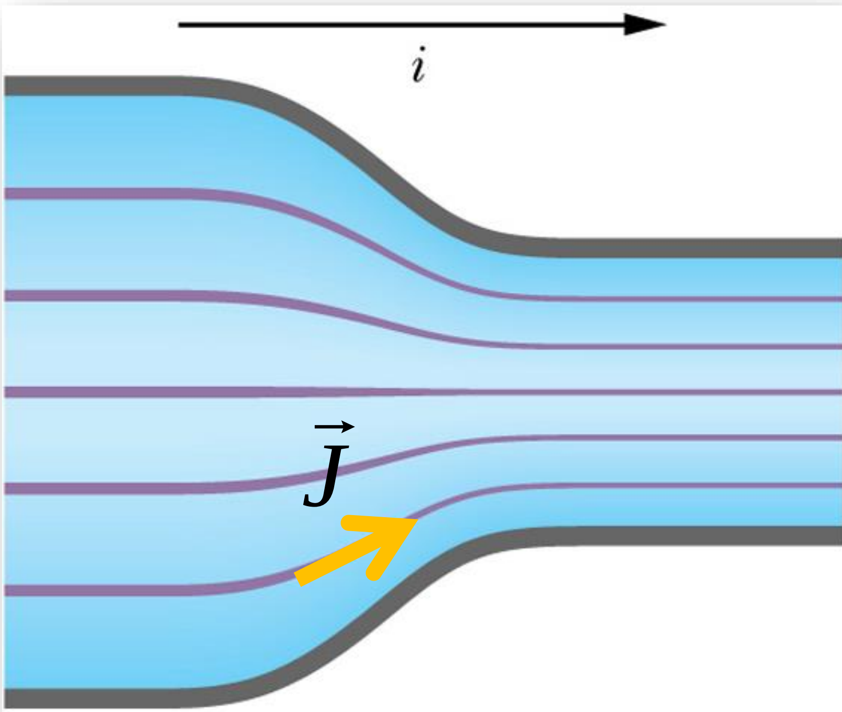
$$i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Se J è uniforme e perpendicolare alla sezione in ogni punto si ha:

$$i = J \int_A dA = J\,A \Rightarrow J = \frac{i}{A} \qquad [J] = \frac{A}{m^2}$$

La **densità di corrente è la corrente che attraversa la sezione unitaria del conduttore, ovvero la corrente per unità di area**

Densità di corrente in un conduttore di sezione non uniforme



- ✓ Come tutti i **campi vettoriali**, anche la **densità di corrente può disegnarsi mediante linee di flusso**
- ✓ Nell'ipotesi di **regime stazionario**, la corrente *i* (ovvero il flusso di ***J***):

$$i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

attraverso la parte larga e la parte strozzata deve essere lo stesso

Dunque nella parte strozzata, **essendo l'area più piccola, deve aumentare il modulo di *J*, ovvero la velocità di drift**: questo è graficamente riprodotto dal fatto che nella parte strozzata le linee di flusso sono più ravvicinate, dunque esprimono un aumento di modulo di *J* rispetto alla parte più larga del conduttore.

Velocità dell'elettrone e velocità di drift

La velocità media degli elettroni v_e in un metallo è enorme:

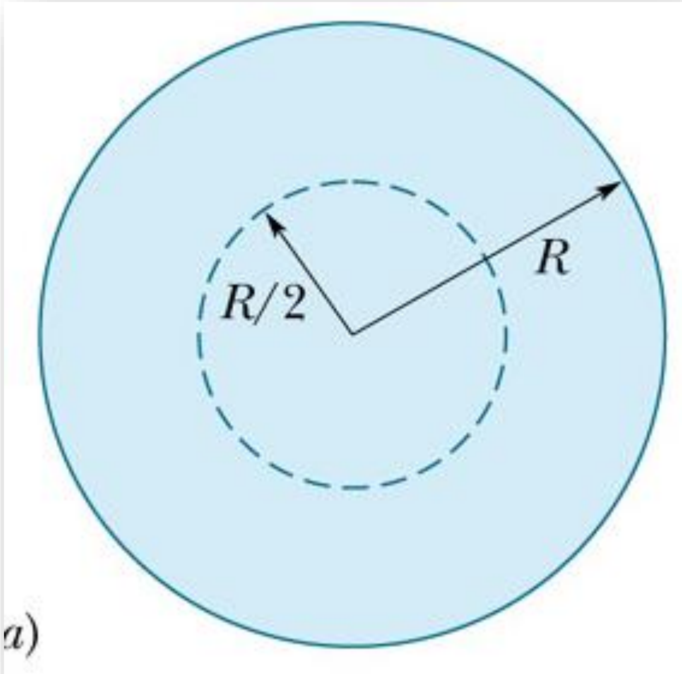
$$v_e \approx 10^6 \frac{m}{s} = 1000 \ \frac{Km}{s}$$

Di contro, la velocità v_d **con cui si muove il flusso di elettroni all'interno del conduttore, sospinti dall'azione del campo elettrico è piccolissima !!**

$$v_d \approx 10^{-5} \frac{m}{s} = 3.6 \frac{cm}{h}$$

A cosa è dovuta questa lentezza della corrente elettrica ??
Lo scopriremo tra breve

Problema 26.2



Si consideri un **conduttore cilindrico** di raggio *R*=2 mm con **densità di corrente uniforme** e perpendicolare alla sezione del cilindro *J*=2x10^5 A/m^2. Si calcoli il valore della corrente nella sola regione cilindrica compresa tra R/2 ed R

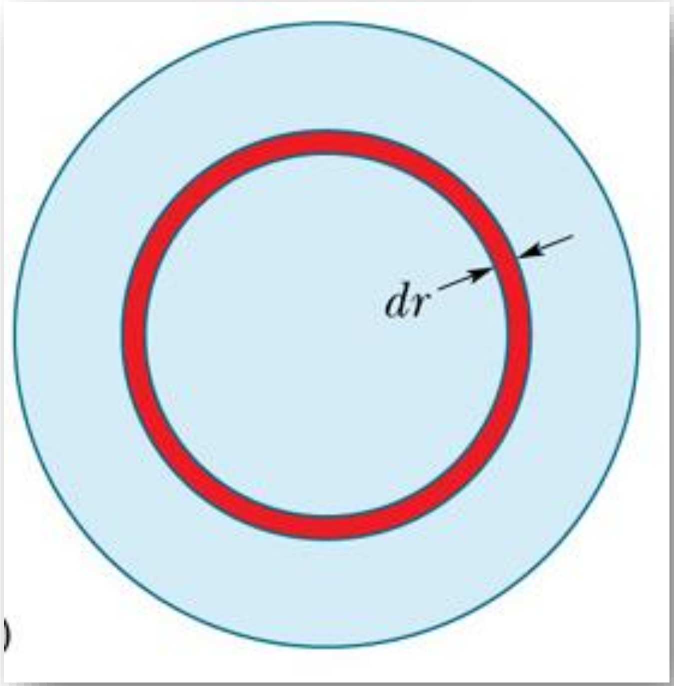
Essendo J uniforme su tutti i punti della superficie attraversata si ha che la corrente totale è:

$$i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = J\left(\pi R^2\right)$$

Per calcolare la corrente che viaggia nel cilindro compreso tra R/2 ed R basta sottrarre alla precedente il contributo dell'area di raggio R/2:

$$i = J\left(\pi R^2\right) - J\left(\pi \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4} J \pi R^2 = 6\pi \times 10^{-1} A = 1.9\, A$$

Problema 26.2



Si consideri lo stesso conduttore cilindrico di raggio R=2 mm ma con densità di corrente radiale $J=ar^2$ ed a=3x10^{11} A/m^4. Si calcoli la corrente nella regione tra R/2 ed R

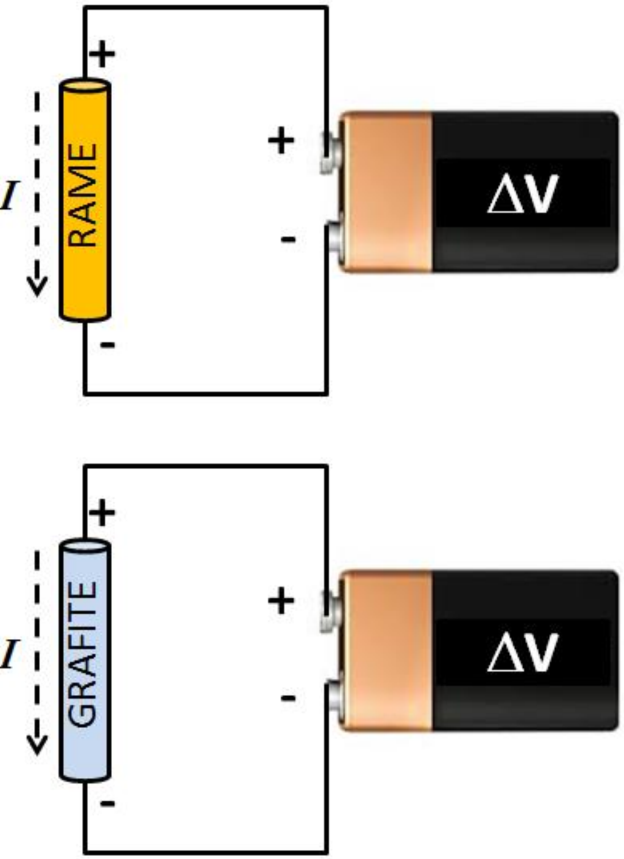
J ha simmetria radiale sulla sezione sferica del cilindro, ovvero J è costante lungo un qualsiasi cerchio di raggio r; il trucco è quindi considerare il flusso infinitesimo su un anello di raggio r e spessore dr e quindi integrare su r:

$$dA = 2\pi r\, dr$$

$$i = \int_A J\, dA = 2\pi a \int_{R/2}^{R} r^3 dr =$$

$$= 2\pi a \frac{1}{4} r^4 \Big|_{R/2}^{R} = \frac{\pi a}{2} R^4 \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{15}{32} \pi a R^4 = 7.1A$$

La resistenza elettrica



- ✓ Nella prima metà del 1800 lo scienziato tedesco **Georg Simon Ohm** iniziò a sperimentare il **passaggio della corrente attraverso materiali conduttori**, utilizzando la pila recentemente inventata da Alessandro Volta (1799)
- ✓ Verificò qualcosa di sorprendente: applicando **la stessa d.d.p. all'estremità di due conduttori di uguale dimensione e forma ma diverso materiale**, per esempio uno di **rame** e uno di **grafite**, l'intensità di corrente che percorre i due fili è diversa: **la corrente che circola nella bacchetta di rame è molto maggiore di quella che circola in quella di grafite**

- ✓ Ne dedusse che la **corrente elettrica,** diversamente da quanto creduto allora**, non circolava liberamente nel conduttore**, ma era **frenata da qualcosa che dipendeva dal tipo di materiale attraversato**
- ✓ Definì quindi una nuova grandezza fisica caratteristica del conduttore: la **RESISTENZA ELETTRICA**

Resistenza elettrica

Georg Simon Ohm (1787-1854). I suoi risultati furono inizialmente respinti dalla comunità scientifica. Visse in povertà fino al 1833 quando fu assunto al politecnico di Norimberga; nel 1853 divenne professore all'Università di Monaco.

- ✓ la **RESISTENZA ELETTRICA** è il rapporto tra la d.d.p. applicata ai capi di un conduttore e l'intensità di corrente che attraversa il conduttore

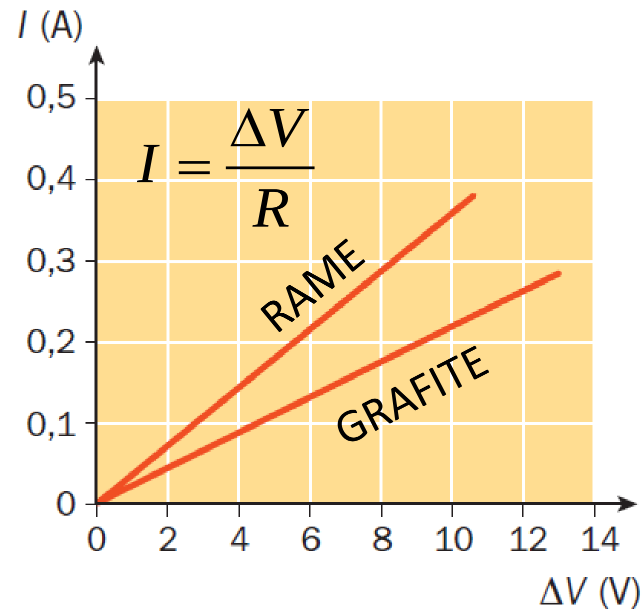
$$R = \frac{\Delta V}{I} \Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R} \Rightarrow \Delta V = IR$$

- ✓ La **resistenza elettrica misura la resistenza di un materiale conduttore ad essere attraversato dalla corrente**
- ✓ Benché conduttore, il materiale pone un 'freno' agli elettroni che lo attraversano. Questo freno dipende dalle caratteristiche specifiche del materiale
- ✓ La resistenza elettrica si misura in **Ohm**, indicata col simbolo Ω (omega)

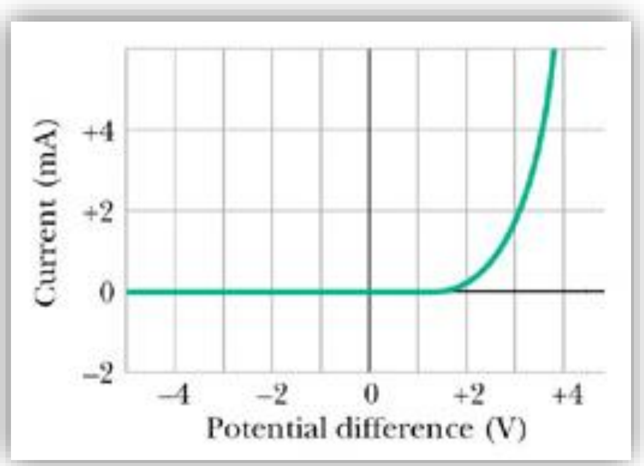
$$[R] = \frac{Volt}{Ampere} = Ohm$$

Prima legge di Ohm

- ✓ Un materiale obbedisce alla prima legge di Ohm se, **a temperatura costante, la resistenza è una costante propria del conduttore**, e dunque non dipende dalla d.d.p. applicata ai capi del conduttore
- ✓ I conduttori che obbediscono alla legge di Ohm si dicono **ohmici**; metalli semplici come **rame** e **grafite** sono ohmici: in figura si vede che corrente e d.d.p. sono direttamente proporzionali, dunque I è una linea retta, la cui pendenza è uguale all'inverso di *R*
- ✓ In realtà, **più che una legge, quello di Ohm è un comportamento** che molti, ma **non tutti i conduttori seguono**
- ✓ In figura vediamo l'andamento **corrente-d.d.p. non rettilineo in un conduttore non-ohmico**; i moderni dispositivi microelettronici come calcolatori, tablet, smartphone sono pieni di conduttori non-ohmici

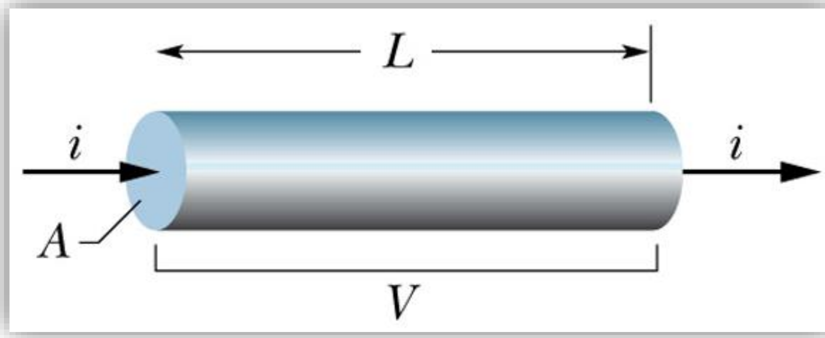


Diodo al silicio non-ohmico



Resistività e seconda legge di Ohm

Consideriamo un filo conduttore di lunghezza L; sia A l'area della sezione e ΔV la d.d.p. ai capi del filo
Assumendo il campo elettrico costante all'interno del filo, e una densità di corrente J uniforme si ha:



$$I = JA \qquad \Delta V = EL \quad \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E}{J}\frac{L}{A}$$

Ohm verificò che il **rapporto tra campo elettrico nel filo e densità di corrente** è una quantità che **dipende soltanto della sostanza** di cui è fatto il conduttore e dalla temperatura, ma non dalla forma o dall'estensione del filo; egli chiamò questa costante **resistività elettrica** ρ ("rho"):

$$\frac{E}{J} = \rho \quad \Rightarrow R = \rho\frac{L}{A}$$

La **2ª legge di Ohm** dice che la resistenza R di un conduttore di sezione costante è proporzionale alla lunghezza (L) e inversamente proporzionale all'area (A) della sezione del conduttore; la **resistività è dunque una grandezza intensiva, a differenza della resistenza che è estensiva**

Valori della resistività nei materiali

$$[\rho]=\frac{RA}{L}\Rightarrow[\rho]=\Omega m$$

- ✓ L'unità di misura della resistività è ohm per metro (Ωm); **la resistività è la resistenza di un conduttore di lunghezza e sezione unitarie**
- ✓ Distinguiamo 3 tipologie di materiali: **conduttori** (bassissima ρ), **isolanti** (altissima ρ), e i **semiconduttori** (ρ intermedia)

Valori della **resistività a T ambiente**

Conduttori	Resistività (Ω · m)	Semiconduttori (s.c.) e isolanti	Resistività (Ω · m)
argento	$1,6 \cdot 10^{-8}$	germanio (s.c.)	0,59
rame	$1,7 \cdot 10^{-8}$	silicio (s.c.)	625
oro	$2,2 \cdot 10^{-8}$	carta	10^{10}
alluminio	$2,7 \cdot 10^{-8}$	vetro	10^{12}
ferro	$1,1 \cdot 10^{-7}$	porcellana	10^{12}
costantana (lega)	$4,5 \cdot 10^{-7}$	PVC	10^{13}
nichel-cromo (lega)	$1,1 \cdot 10^{-6}$	polistirolo	$> 10^{14}$
grafite	10^{-5}	plexiglas	$> 10^{19}$

Origine microscopica della resistività

- Dalle leggi di Ohm deriva che se il campo e la d.d.p. sono costanti nel tempo, poiché la resistività (a temperatura fissata) è una costante, anche la **densità di corrente, e di conseguenza la velocità di drift, devono mantenersi costanti nel tempo**:

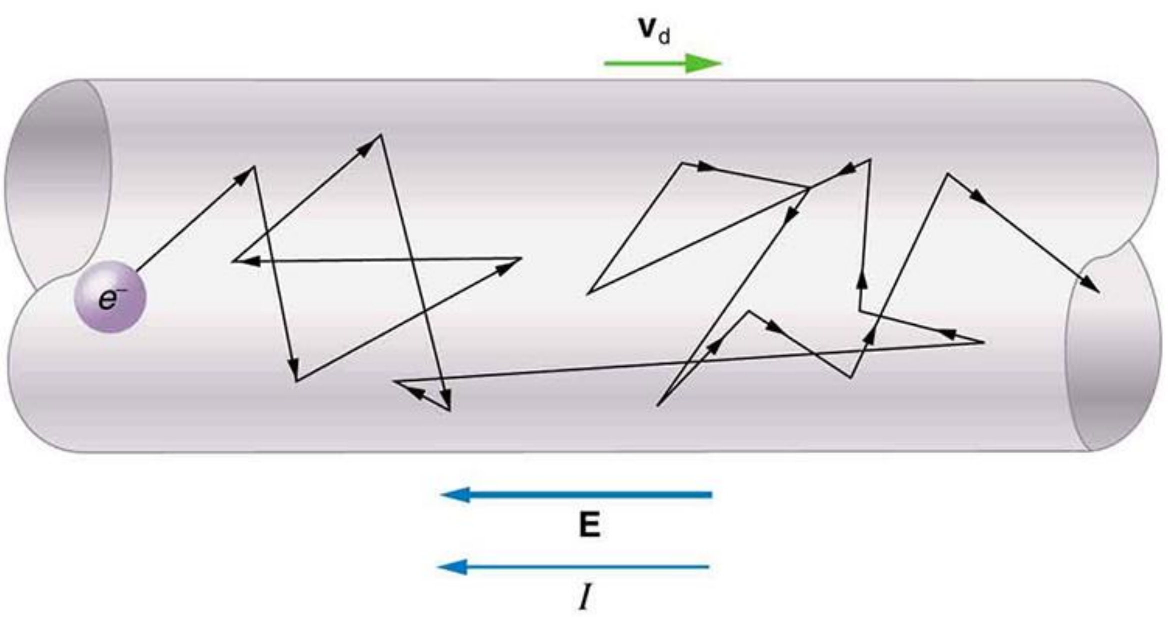
$$\frac{E}{J} = \rho \qquad J = \frac{E}{\rho} = nev_d \Rightarrow v_d = \frac{1}{ne\rho} E$$

- Secondo le leggi di Ohm, **la velocità del flusso elettronico nella direzione del campo elettrico** v_d deve essere **costante nel tempo**
- Inoltre, **dai valori della resistività**, per d.d.p. dell'ordine del volt risulta che v_d deve essere **piccolissima**: $v_d \sim 10^{-5}$ m/s
- Ciò contrasta col fatto che, se gli elettroni fossero LIBERI di muoversi, sotto l'azione di un campo uniforme dovrebbero subire **un'accelerazione uniforme**, e dunque una **velocità crescente nel tempo**
- in pochi istanti la **velocità** nella direzione del campo dovrebbe diventare **altissima**, così come la corrente elettrica, a causa della piccolissima massa dell'elettrone;

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} \qquad \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}\, t$$

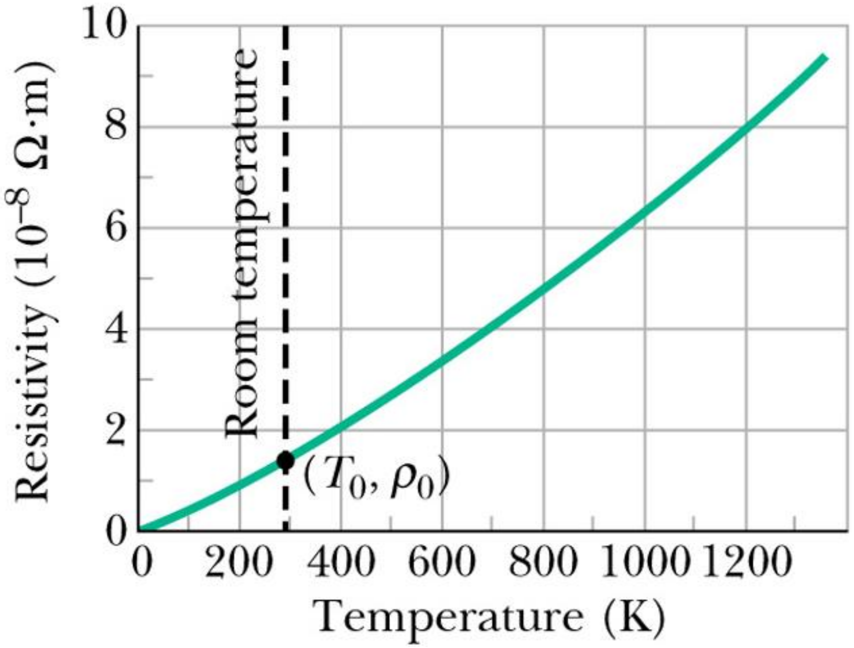
Origine microscopica della resistività

- ✓ Secondo Ohm, a causa della resistenza elettrica il moto elettronico è **frenato all'interno del conduttore**; da cosa **origina, a livello microscopico**, questo fenomeno ?
- ✓ Il moto degli elettroni di conduzione **non è totalmente libero**: essi **'urtano' contro gli atomi che ne frenano** fortemente il flusso; **più frequenti sono gli urti, maggiore è la resistività del materiale**
- ✓ gli urti sono causati dalle **vibrazioni atomiche:** a causa della temperatura, gli atomi vibrano rapidamente attorno alle loro posizioni di equilibrio, e gli elettroni **urtano continuamente contro di essi**: ogni secondo l'elettrone urta contro un atomo circa 10^{14} - 10^{15} volte !!



Dipendenza della resistività dalla temperature

- ✓ Nei **conduttori la resistività aumenta con la temperatura**: in figura è riportato l'esempio della **resistività del rame**
- ✓ Ciò avviene poiché con l'aumento di T aumentano l'ampiezza e la frequenza delle vibrazioni atomiche attorno alle posizioni di equilibrio, e dunque aumenta la probabilità e la frequenza degli urti tra atomi ed elettroni di conduzione

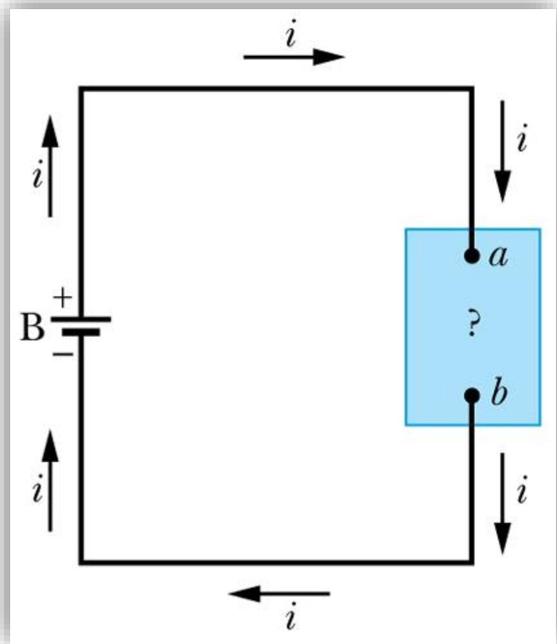


- ✓ Nei **semiconduttori** il comportamento è opposto: **la resistività diminuisce fortemente con la temperatura**; i semiconduttori non hanno elettroni di conduzione, ma una piccola frazione di elettroni può saltar fuori dal guscio atomico più esterno a causa dell'agitazione termica; dunque maggiore è la temperatura del cristallo, maggiore è la carica in grado di muoversi e quindi l'intensità della corrente elettrica generata dal campo applicato

Trasformazione di energia elettrica in calore: effetto Joule

- ✓ In assenza di urti, un **elettrone accelerato** dal campo elettrico aumenta progressivamente la propria velocità e quindi l’energia cinetica; dunque **l’energia spesa dal campo elettrico genera un aumento di energia cinetica degli elettroni ed una corrispondente diminuzione di energia potenziale** $\Delta U = e\,\Delta V$
- ✓ Invece abbiamo visto che v_d nella direzione del campo è uniforme, dunque anche l’energia cinetica degli elettroni resta costante; chiaramente sembra esserci una violazione della conservazione di energia; ma allora **dove va a finire l’energia spesa dal campo elettrico** ?
- ✓ A causa degli urti, l’energia non si conserva: ogni volta che urta contro un atomo, l’elettrone cede energia cinetica al reticolo cristallino, provocando così un **incremento della vibrazione reticolare e dunque della temperatura del cristallo**. Dunque il lavoro del campo elettrico speso per produrre il flusso di corrente si trasferisce **al materiale sotto forma di ENERGIA TERMICA , ovvero si trasforma in CALORE del materiale**
- ✓ La **trasformazione dell’energia elettrica in calore si dice EFFETTO JOULE**

Energia e potenza erogata dalla batteria



- ✓ Consideriamo il circuito in figura, con una batteria B connessa con un generico dispositivo; la batteria mantiene una *ΔV* fissata tra i punti *a* e *b* collegati ai poli, generando una corrente continua *i* attraverso il circuito
- ✓ Il lavoro compiuto (energia spesa) dalla batteria per far circolare una carica infinitesima *dq* nel tempo *dt* è dato da:

$$dU = dq\,\Delta V = i\,dt\,\Delta V$$

Poiché *ΔV* della batteria non varia nel tempo, l'energia totale erogata nel tempo *t* è:

$$\Delta U = \Delta V \int_0^t i\,dt = Q\Delta V$$

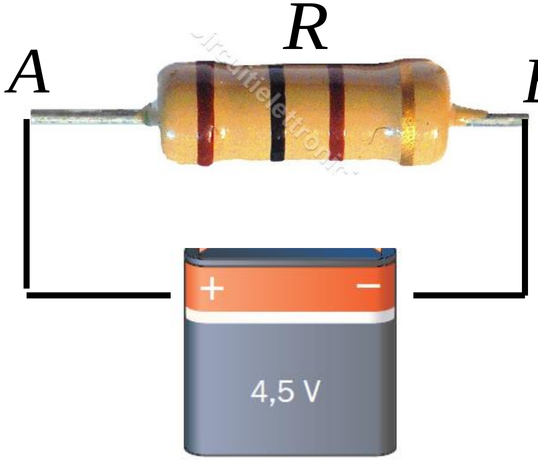
Ove *Q* è l'intera carica circolata nel circuito nel tempo *t*; la **potenza**: erogata dalla batteria è:

$$P_B = \frac{dU}{dt} = \frac{dq\,\Delta V}{dt} = i\,\Delta V$$

Dunque la **potenza (energia per unità di tempo) erogata dalla batteria è data dal prodotto della corrente erogata per la d.d.p. della batteria**

Legge di Joule

Consideriamo un **resistore**, ai cui capi sia applicata una tensione *ΔV;* la **potenza (lavoro per unità di tempo) erogata** dalla batteria per far circolare la corrente *i* attraverso il circuito è:



$$P_B = i\,\Delta V \qquad \Delta V = V_A - V_B$$

Se all'interno del circuito vi è soltanto la resistenza *R*, **per la conservazione dell'energia tutta la potenza erogata deve essere dissipata in calore**; ne segue che la potenza dissipata P_R è:

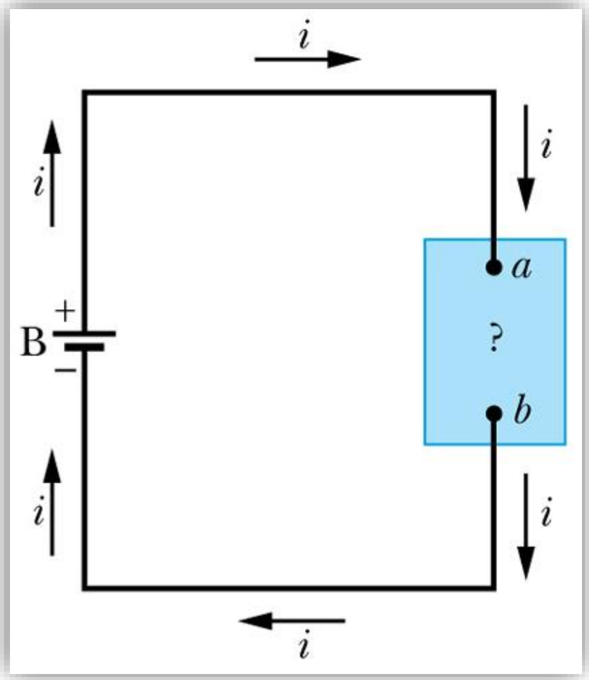
$$P_R = P_B = i\,\Delta V$$

Utilizzando Ohm, $\Delta V = R\,i$ si ottiene infine:

$$P_R = I^2 R$$

Questa è la celebre **LEGGE DI JOULE: la quantità di calore per unità di tempo sviluppata nel passaggio di una corrente elettrica attraverso il resistore è data dal prodotto del quadrato della corrente per la resistenza del resistore**

Trasformazione di energia nel circuito



Come viene spesa l'energia erogata dalla batteria ? Dipende dal dispositivo inserito nel circuito

✓ Se il dispositivo è un **resistore**, si è trasformata in **energia termica** (ovvero CALORE) del resistore:

$$P = i^2 R$$

✓ Se il dispositivo è un **condensatore,** l'energia è (parzialmente) **immagazzinata nel dispositivo:**

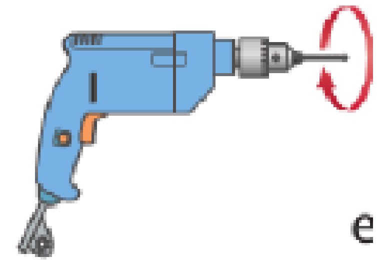
$$\Delta U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

✓ Se il dispositivo è un **motore elettrico**, l'energia erogata è (parzialmente) trasformata in **lavoro meccanico** compiuto dal motore

In pratica qualunque motore o la stessa batteria hanno **sempre una propria resistenza interna**, per cui in qualunque bilancio energetico **esiste sempre una porzione di energia dissipata in calore**

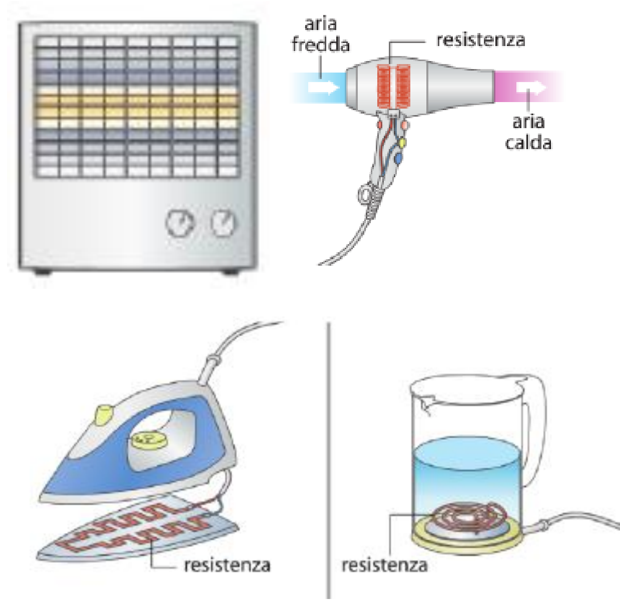
Motori elettrici e resistori

Nei conduttori percorsi da corrente avviene sempre un certo **riscaldamento,** ovvero la trasformazione di almeno una porzione di energia elettrica in calore (effetto Joule), poiché nessuna sostanza è totalmente priva di resistenza elettrica (ad eccezione dei materiali superconduttori). Questo calore rappresenta uno spreco energetico nei motori elettrici, mentre è utilmente sfruttata come sorgente di riscaldamento nei resistori.



<u>Motori elettrici</u>: macchine che trasformano energia elettrica in lavoro meccanico, come un rasoio elettrico o un trapano; hanno tutti una loro **resistenza interna** che genera calore, dunque energia persa rispetto al lavoro erogato dal generatore

<u>Resistori:</u> conduttori con alta resistività utilizzati per la **generazione di calore**. Nelle *stufe elettriche*, le resistenze si riscaldano al punto di diventare incandescenti ed emettere calore per irraggiamento. Nelle *lampadine ad incandescenza*, il filo incandescente emette una porzione (piccola) di radiazione elettromagnetica nel visibile, così da permette l’illuminazione. Nel *phon* c’è una resistenza che scaldandosi emette aria calda. Altri esempi sono la *caldaia, la lavastoviglie, la lavatrice, il bollitore*



Resistori in commercio

- ✓ In molte apparecchiature elettriche sono inseriti **componenti** detti **resistori,** o semplicemente resistenze, dotati di una **ben determinata resistenza elettrica**
- ✓ Sul resistore sono impresse quattro strisce colorate che, mediante un codice di colori standard, identificano il valore della resistenza. I colori delle prime due strisce indicano prima e seconda cifra, la terza striscia l'esponente della potenza di 10, la quarta la tolleranza
- ✓ Nell'esempio in figura si ha: verde (5), blu (6), arancio (3), oro (5), che significa $R=56x10^3\ \Omega$ con tolleranza del 5%.

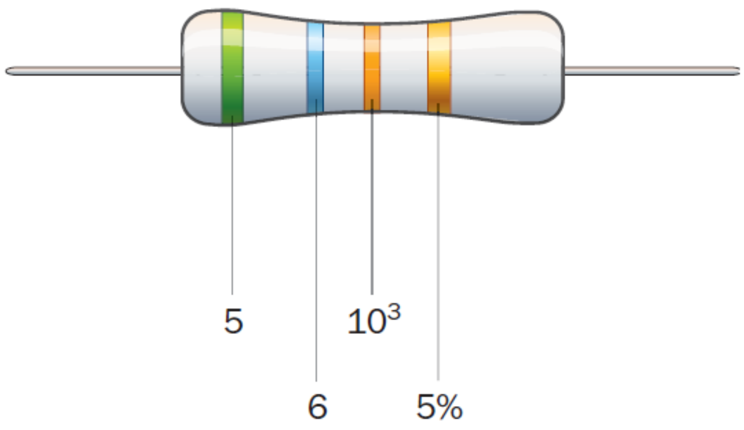
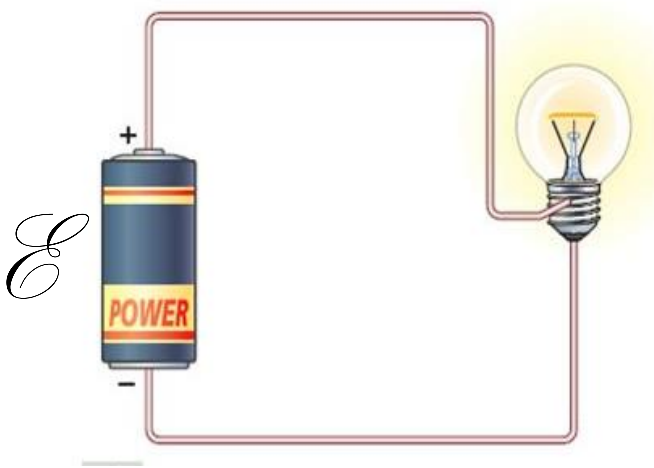


Tabella 5 Codice dei colori usati per i resistori.

Colore	Cifra	Tolleranza	(±)
nero	0	marrone	1%
marrone	1	rosso	2%
rosso	2	oro	5%
arancione	3	argento	10%
giallo	4	nessuno	20%
verde	5		
blu	6		
viola	7		
grigio	8		
bianco	9		

Il circuito elettrico



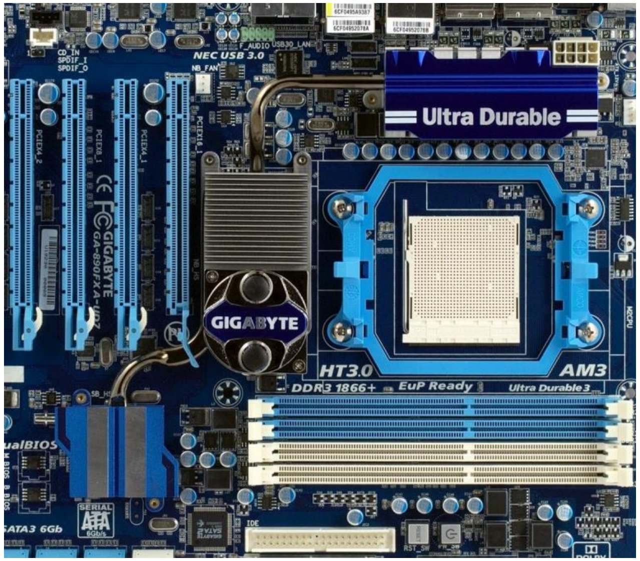
✓ Si chiama **circuito elettrico un generico percorso chiuso in cui le cariche possono muoversi con continuità**, costituito da un insieme di **componenti** collegati tra loro mediante **fili conduttori**.

✓ I **componenti** possono essere soltanto due, come la pila e la lampadina in una torcia elettrica, oppure milioni, come quelli della scheda madre all'interno di un computer

✓ Il componente fondamentale di un circuito è il **generatore**: esso **mantiene una d.d.p. fissata** tra i due punti del circuito a cui e collegato; pile e batterie sono **generatori di d.d.p.** continua e costante.

✓ La d.d.p. del generatore si dice anche **forza elettromotrice (f.e.m.)** indicata con $\mathcal{E}$

✓ Tutti gli altri elementi del circuito si chiamano **utilizzatori**, poiché utilizzano o consumano l'energia elettrica fornita dal generatore; la lampadina, un motore elettrico, una resistenza, sono esempi di utilizzatori



Il filo elettrico

✓ I fili elettrici (tipicamente di **rame**) hanno una **resistenza così piccola da poter essere trascurata rispetto a quella dei componenti del circuito;** anche considerando un filo di rame molto lungo (L=1 m) e spessore molto piccolo (A= 1 mm^2) si ha:

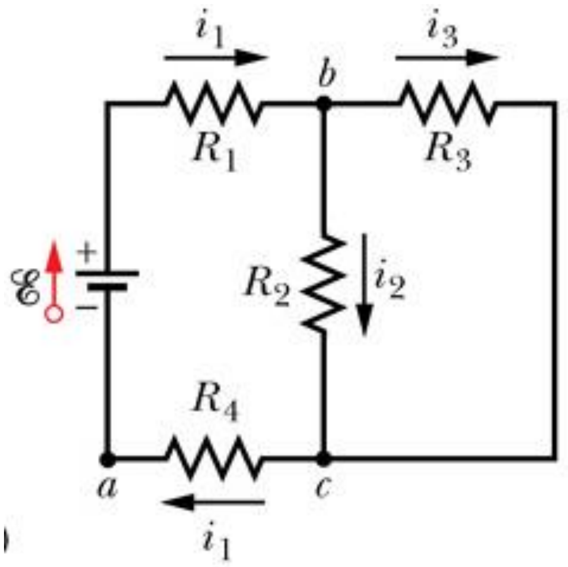
$$R = \rho \frac{L}{A} = 10^{-8}\Omega m \frac{1m}{10^{-6}m^2} = 10^{-2}\Omega$$

trascurabile rispetto ai valori tipici delle resistenze che si trovano nei circuiti elettrici ($\sim \Omega$ - KΩ); l'insieme delle resistenze di un circuito si dice anche **carico resistivo**

✓ Se si collegano i poli del generatore ad un circuito privo di carico resistivo si ottiene un **cortocircuito: la corrente in pochi attimi diventa enorme,** scaricando la pila e danneggiando il generatore. Inoltre per effetto Joule la corrente elevata può provocare bruciare il filo conduttore, ed innescare un incendio

✓ Per prevenire questo rischio si usano i **fusibili di protezione**, componenti elettrici costituiti da un piccolo tratto di filo metallico a basso punto di fusione. Quando la corrente supera un certo valore, per esempio a causa di un cortocircuito, il fusibile fonde e interrompe il circuito

Circuiti di resistori e leggi di Kirchoff



- ✓ In un circuito di resistori alimentato da un generatore tipicamente si conoscono le resistenze e la d.d.p. della batteria
- ✓ risolvere il circuito significa **determinare le correnti e le d.d.p. presenti in ogni ramo del circuito**
- ✓ A tal fine si utilizzano le celebri **leggi di Kirchhoff**

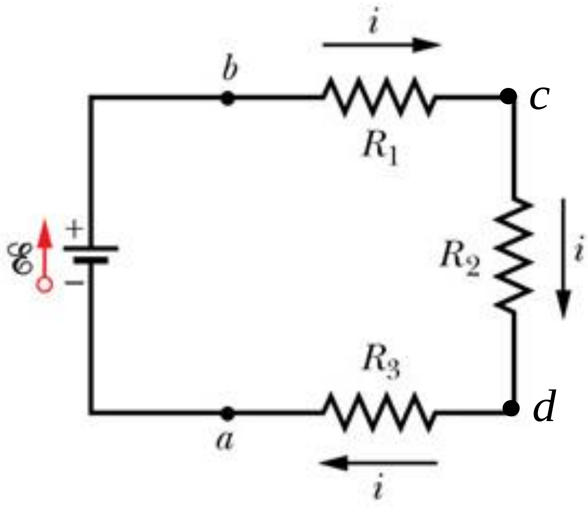
1ª legge di Kirchoff (o legge dei nodi): **nei nodi del circuito la corrente si conserva, ovvero la corrente entrante deve essere uguale a quella uscente** (si dicono nodi del circuito i punti in cui convergono più rami)

Nell'esempio in figura vediamo che nel nodo *b* entra la corrente i_1 ed escono le correnti i_2, i_3; dunque la 1ª legge di Kirchoff ci dà:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Nel nodo *c* la corrente i_1 esce mentre i_2, i_3 entrano; la relazione tra le correnti è ovviamente la stessa

Circuiti di resistori e leggi di Kirchoff



- **2ª legge di Kirchhoff**: **la somma algebrica delle d.d.p. calcolate su ciascun ramo di un percorso chiuso è nulla.**
- Consideriamo i punti *a*,*b*,*c*,*d* del circuito in figura, alimentato da una batteria di f.e.m. $\mathscr{E}$; è facile verificare che:

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_a) = 0$$

- Dobbiamo stabilire un verso della corrente: dalla disposizione dei poli della batteria si deduce che debba scorrere in verso orario
- Applichiamo la legge di Ohm: le d.d.p. ai capi dei rami sono:

$$(V_b - V_c) = i\,R_1 \quad (V_c - V_d) = i\,R_2 \quad (V_d - V_a) = i\,R_3$$

- Sostituiamo la d.d.p. ai capi della batteria col suo valore di f.e.m.

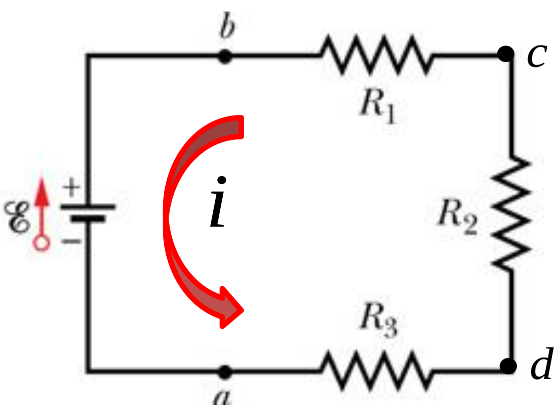
$$(V_b - V_a) = \mathscr{E}$$

Circuiti di resistori e leggi di Kirchoff

- ✓ Sostituiamo i valori delle d.d.p. nella seconda legge di Kirchhoff:

$$-\mathscr{E} + i\,R_1 + i\,R_2 + i\,R_3 = 0 \quad \Rightarrow i = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- ✓ Ottenuto il valore della corrente, tutte le d.d.p. possono essere facilmente calcolate applicando la 1ª legge di Ohm
- ✓ **Se scegliessimo il verso opposto della corrente** ? Partiamo ad esempio dal punto *a*, ed applichiamo Kirchhoff in verso opposto:



$$(V_a - V_d) + (V_d - V_c) + (V_c - V_b) + (V_b - V_a) = 0$$

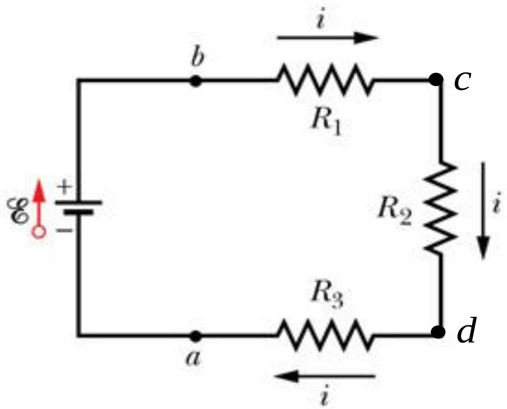
$$(V_a - V_d) = i\,R_3 \quad (V_d - V_c) = i\,R_2 \quad (V_c - V_b) = i\,R_1$$

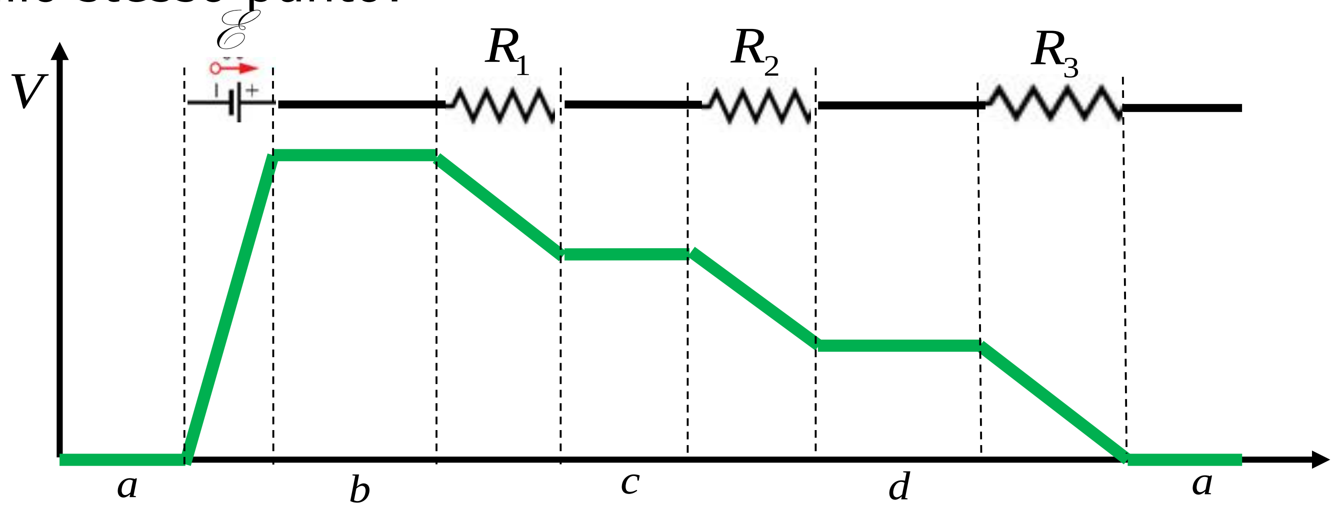
$$(V_b - V_a) = \mathscr{E} \qquad \Rightarrow i = -\frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- ✓ Si arriva allo **stesso valore della corrente ma con segno negativo !** ciò indica che il verso delle cariche positive è quello precedente, cosa del resto facilmente intuibile dai poli della batteria, visto che la corrente scorre dal polo positivo a quello negativo

Profilo del potenziale

- ✓ Un modo intuitivo per capire la 2ª legge di Kirchoff è visualizzare il **profilo del potenziale dispiegato lungo una linea retta come un profilo altimetrico**: partiamo ad esempio dal punto *a* e percorriamo tutto il circuito fino allo stesso punto:





✓ Il filo ha resistenza trascurabile, per cui **lungo i fili il potenziale è costante**; dunque i **fili sono tratti pianeggianti di potenziale**

✓ Attraversando i poli della batteria, il potenziale aumenta: **la batteria è la funivia** che spende lavoro consentendo al **potenziale di 'salire di quota'**

✓ Attraversando le resistenze il potenziale scende: **le resistenze rappresentano discese** in cui il lavoro della batteria è speso in effetto Joule

✓ La 2ª legge di Kirchoff dice semplicemente che **l'energia fornita dal generatore deve essere uguale a quella dissipata dai resistori**, ovvero alla conclusione del circuito salite e discese totali devono compensarsi

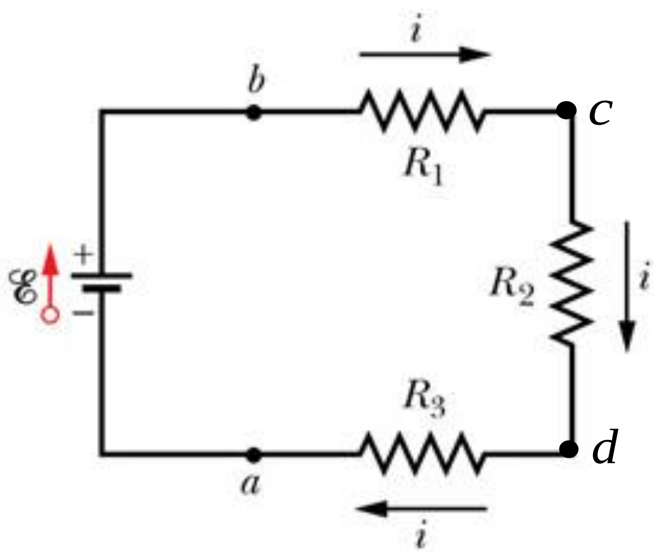
Resistenze in serie

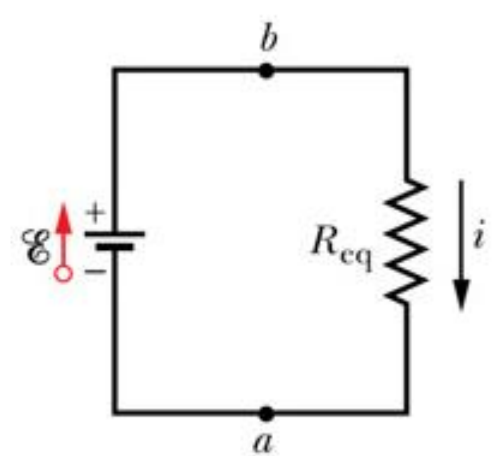
- ✓ Le resistenze si dicono **IN SERIE** se sono poste in successione lungo lo stesso filo, per cui in ognuna di esse scorre la **stessa corrente**, mentre la **differenza di potenziale prodotta dal generatore si ripartisce tra tutti i resistori**
- ✓ Le resistenze in serie possono essere sostituite da un'unica **resistenza equivalente, uguale alla somma delle singole resistenze**, in cui scorre **stessa corrente e ai cui capi c'è una d.d.p. somma delle d.d.p. presenti ai capi delle singole resistenze**

$$\mathscr{E} = iR_{eq}$$

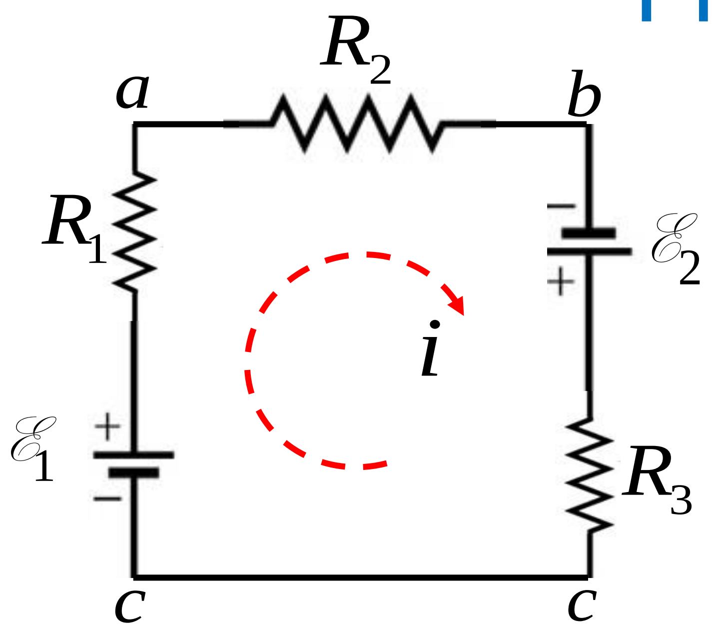
$$\mathscr{E} = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$





Problema 27



Consideriamo il circuito in Figura, **con due batterie in serie ed in fase**, con:

$$\mathscr{E}_1 = 4V \qquad \mathscr{E}_2 = 2V$$

$$R_1 = 2\Omega \qquad R_2 = 5\Omega \qquad R_3 = 1\Omega$$

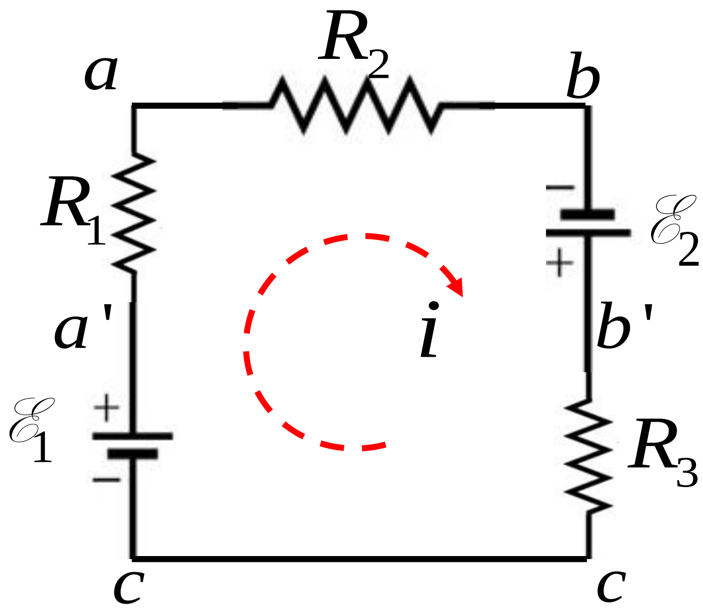
1) calcolare la corrente nel circuito

Il verso della corrente positiva è chiaramente quello indicato in figura, concorde con il verso dei poli delle batterie; applichiamo la 2° legge di Kirchoff, eguagliando le f.e.m. (salite di potenziale) alle d.d.p. ai capi delle resistenze (discese di potenziale):

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = i\left(R_1 + R_2 + R_3\right)$$

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)} = \frac{6V}{8\Omega} = 0.75A$$

Problema 27



2) Calcolare le d.d.p. ΔV_1, ΔV_2, ΔV_3, ai capi delle resistenze R_1, R_2, R_3 :

$$\Delta V_1 = V_{a'} - V_a = i\,R_1 = 1.5V$$

$$\Delta V_2 = V_a - V_b = i\,R_2 = 3.75V$$

$$\Delta V_3 = V_{b'} - V_c = i\,R_3 = 0.75V$$

3) Calcolare la potenza dissipata sulle resistenze:

$$P_1 = i^2 R_1 = i\,\Delta V_1 = 2.8125W$$

$$P_2 = i^2 R_2 = i\,\Delta V_2 = 1.125W$$

$$P_3 = i^2 R_3 = i\,\Delta V_3 = 0.5625W$$

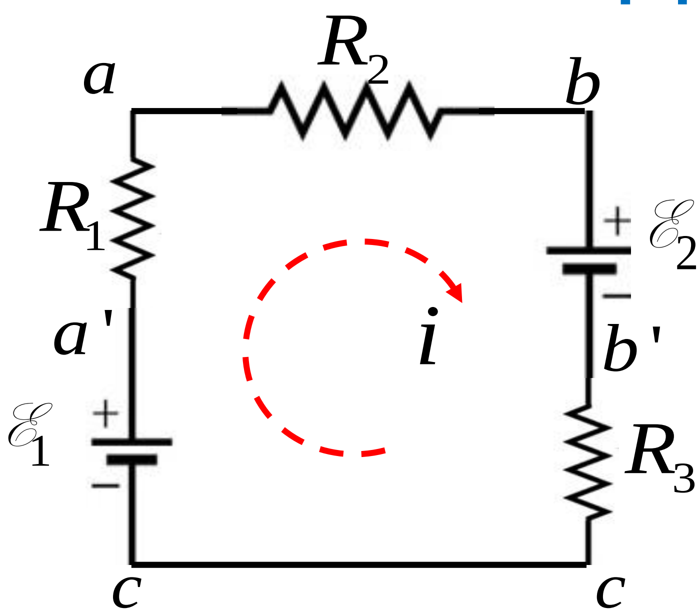
4) Calcolare la potenza erogata dalle batterie:

$$P_{B_1} = \mathscr{E}_1\, i = 3W$$

$$P_{B_2} = \mathscr{E}_2\, i = 1.5W$$

si noti che la somma delle potenze dissipate è uguale alla somma delle potenze erogate dalle due batterie (**conservazione dell'energia**)

Problema 27



Consideriamo lo stesso circuito ma con la batteria 2 montata al contrario; essendo la batteria 2 in opposizione di fase alla prima, assumendo lo stesso verso della corrente si ha

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = i\left(R_1 + R_2 + R_3\right)$$

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)} = \frac{2V}{8\Omega} = 0.25A$$

Ricalcoliamo d.d.p. e potenze:

$$\Delta V_1 = i\,R_1 = 0.5V \qquad P_1 = i\,\Delta V_1 = 0.125W \qquad P_{B_1} = \mathscr{E}_1\, i = 1W$$

$$\Delta V_2 = i\,R_2 = 1.25V \qquad P_2 = i\,\Delta V_2 = 0.3125W \qquad P_{B_2} = \mathscr{E}_2\, i = 0.5W$$

$$\Delta V_3 = i\,R_3 = 0.25V \qquad P_3 = i\,\Delta V_3 = 0.0625W$$

- ✓ adesso **la corrente scorre contro il verso della batteria 2,** per cui P_{B2} è **potenza ASSORBITA** dalla batteria 2; in questa configurazione la **batteria 2 è in fase di carica**
- ✓ dunque la potenza erogata dalla batteria 1 è la somma di quella **dissipata** sulle resistenze, più quella **assorbita** dalla 2

Resistenze in parallelo

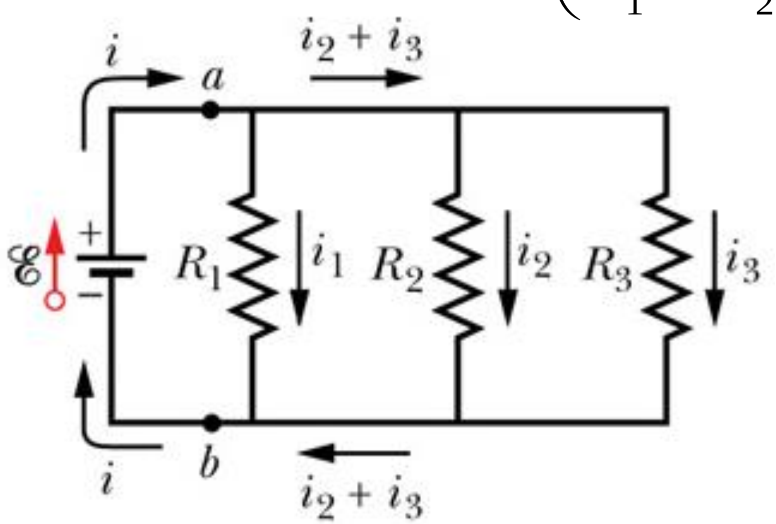
- ✓ Le resistenze si dicono **IN PARALLELO** se sono ordinate in rami di circuito con **ai capi stessa d.d.p.**
- ✓ la **corrente totale** che attraversa il generatore è la **somma delle correnti che scorrono nei singoli rami**
- ✓ Le resistenze in parallelo possono essere sostituite da un'unica **resistenza equivalente, il cui inverso è uguale alla somma degli inversi delle singole resistenze**, in cui scorre la corrente totale, e ai cui capi c'è la stessa d.d.p. delle singole resistenze

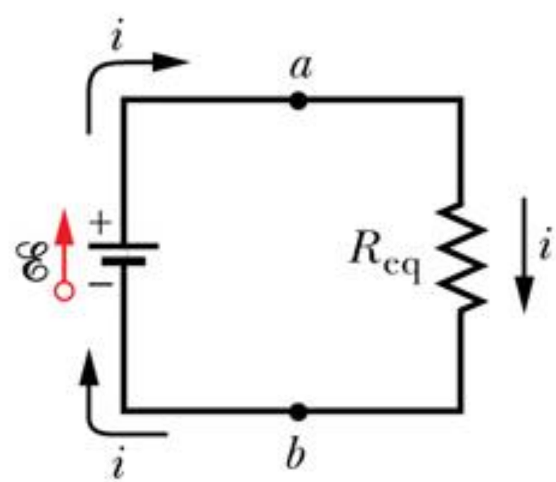
$$\mathscr{E} = V_a - V_b = i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\mathscr{E} = i R_{eq}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

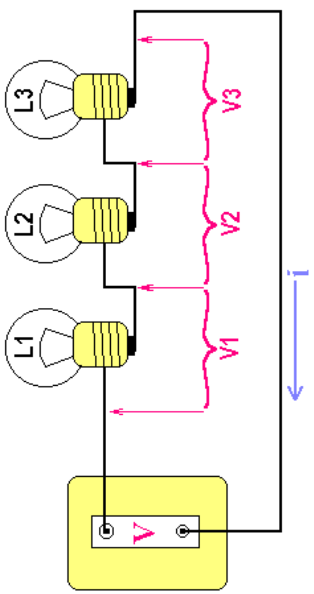


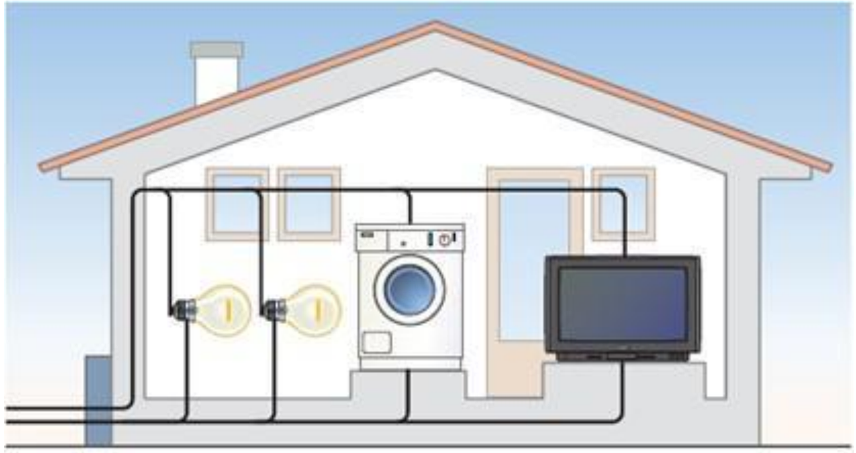


Collegamento in serie e in parallelo

Le lampadine dell'albero di Natale sono connesse in serie: se una si fulmina il circuito si apre: non passa più corrente e nessuna lampadina si illumina più.

Gli elettrodomestici di casa (luci, televisore, elettrodomestici) sono **tutti connessi in parallelo**: se uno smette di funzionare gli altri continuano a funzionare regolarmente

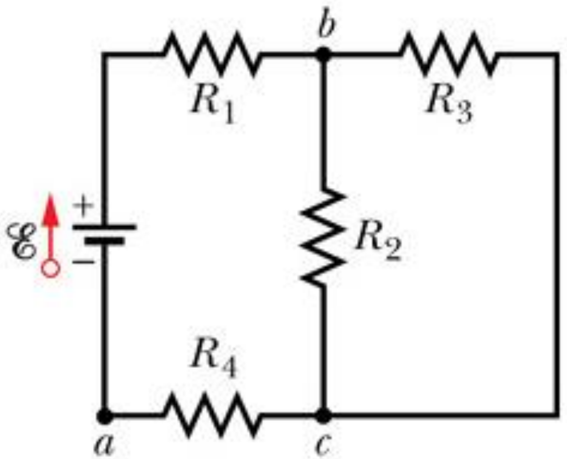




Problema 27.2

La figura mostra un circuito a più maglie con valori:

$$\mathscr{E} = 12V \quad R_1 = 20\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 8\Omega$$



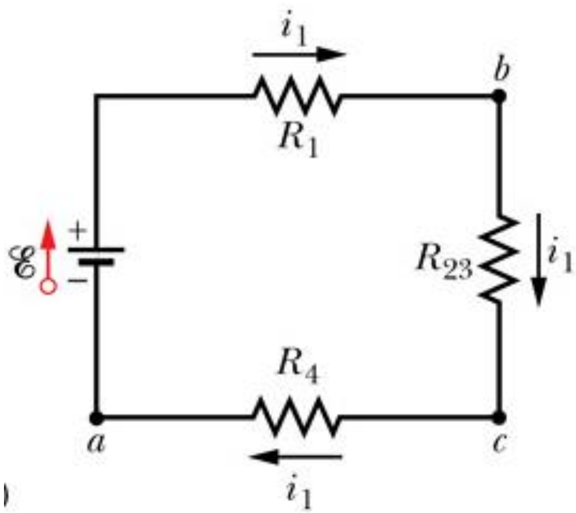
1) Calcolare la corrente i_1 che transita attraverso il ramo della batteria.

R_2 ed R_3 sono in parallelo:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{23} = 12\Omega$$

R_1, R_{23} ed R_4 sono in serie:

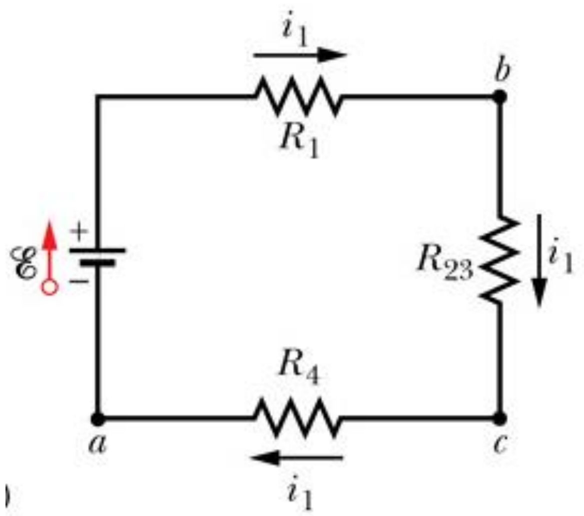
$$R_{1234} = R_1 + R_{23} + R_4 = 40\Omega$$



Essendo in serie, la corrente che transita attraverso R_1, R_{23}, R_4, R_{1234} è la stessa; dunque:

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_{1234}} = \frac{12V}{40\Omega} = 0.3A$$

Problema 27.2



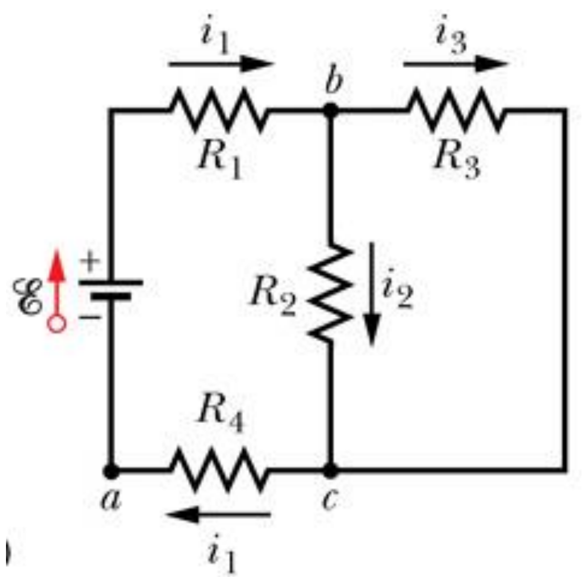
$\mathscr{E} = 12V \quad R_1 = 20\Omega \quad R_2 = 20\Omega$

$R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 8\Omega$

2) Calcolare le correnti i_2, i_3 che transitano attraverso R_2 ed R_3

Sappiamo che attraverso R_{23} scorre la corrente i_2; possiamo quindi calcolare la d.d.p. ai capi di R_{23}:

$$V_b - V_c = i_1 R_{23} = 0.3A \times 12\Omega = 3.6V$$



Questa d.d.p. è comune ai resistori paralleli R_2 ed R_3 , per cui le rispettive correnti sono:

$$i_2 = \frac{V_b - V_c}{R_2} = \frac{3.6V}{20\Omega} = 0.18A$$

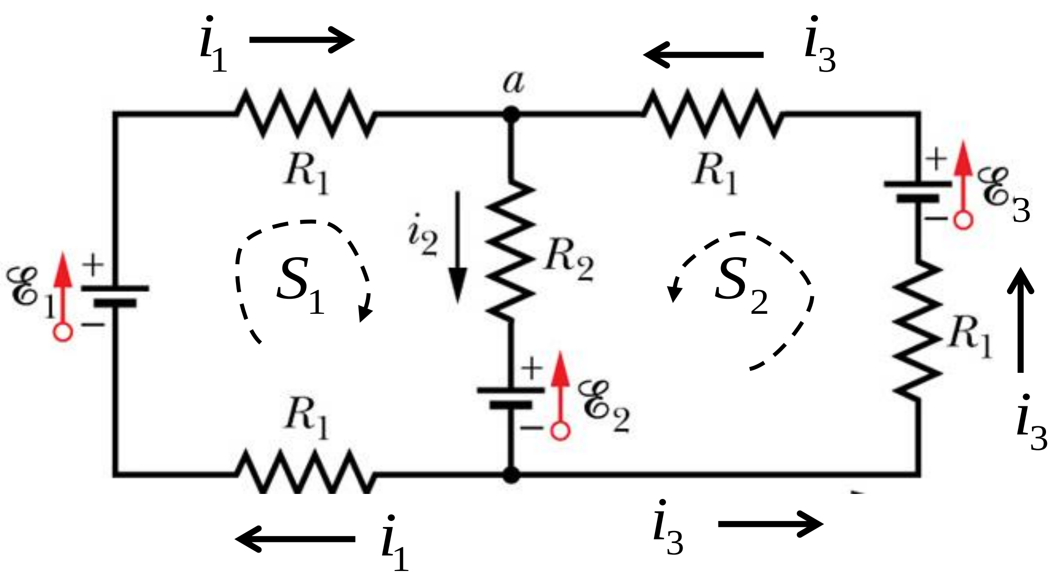
$$i_3 = \frac{V_b - V_c}{R_3} = \frac{3.6V}{30\Omega} = 0.12A$$

Come verifica del risultato, applichiamo la 1ª legge di Kirchhoff nel nodo b:

$$i_1 = i_2 + i_3 = 0.3A$$

Problema 27.3

La figura mostra un circuito con 2 maglie e 3 batterie; date le f.e.m. e le resistenze, trovare i valori delle correnti in ogni ramo del circuito



$$\mathscr{E}_1 = 3V \quad \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = 6V$$

$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 4\Omega$$

- ✓ Ipotizziamo un verso per ciascuna corrente;
- ✓ scriviamo la 2° legge di Kirchoff per ciascuno dei circuiti chiusi S_1 ed S_2
- ✓ applichiamo la legge dei nodi in *a*:

Circuito S_1: $$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = i_1R_1 + i_2R_2 + i_1R_1 = 2i_1R_1 + i_2R_2$$

Circuito S_2 : $$\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2 = i_3R_1 + i_2R_2 + i_3R_1 = 2\,i_3R_1 + i_2R_2 = 0$$

Nodo : $$i_1 + i_3 = i_2$$

Abbiamo un sistema di 3 equazioni lineari per 3 incognite $i_1\ i_2\ i_3$

Problema 27.3

Circuito S_1: $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = 2 i_1 R_1 + i_2 R_2$

Circuito S_2 : $\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2 = i_3 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_1 = 2\, i_3 R_1 + i_2 R_2 = 0$

Nodo : $i_1 + i_3 = i_2$

✓ Dall'Eq. per S_2 ricaviamo $i_2 = -i_3 \left(2R_1 / R_2 \right)$

✓ Dall'Eq. dei nodi ricaviamo $i_1 + i_3 = -i_3 \left(2R_1 / R_2 \right) \Rightarrow i_1 = -i_3 \dfrac{2R_1 + R_2}{R_2}$

✓ Sostituiamo questo risultato nell'Eq. per S_1 e risolviamo rispetto ad i_3

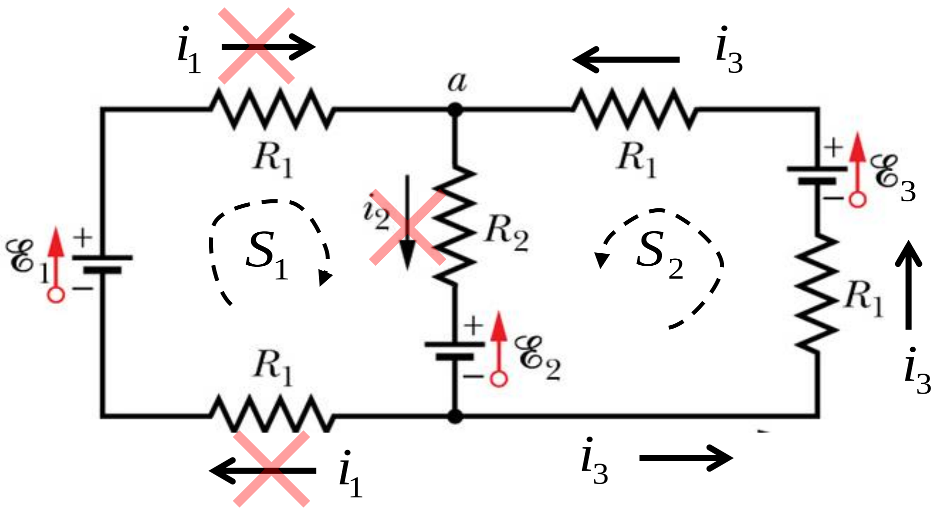
$$i_3 = -\left(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \right) \frac{R_2}{4R_1^{\,2} + 4R_1 R_2} = 0.25A$$

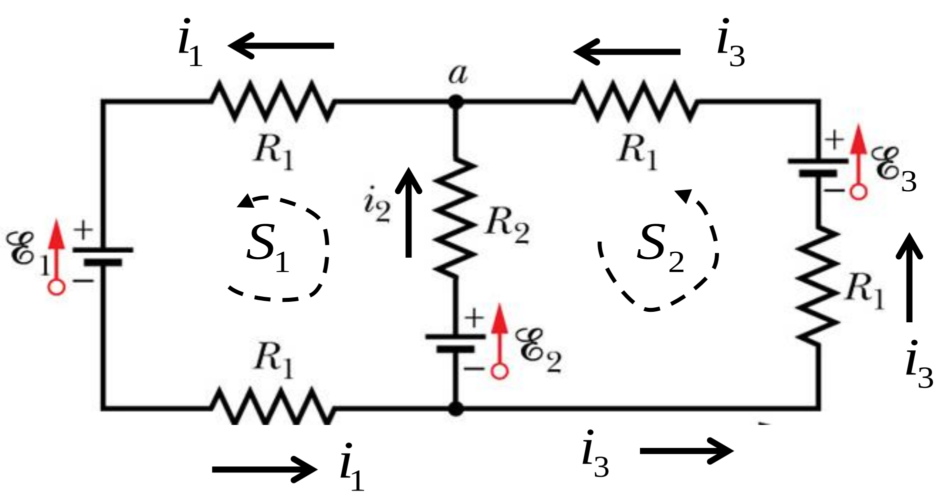
$\mathscr{E}_1 = 3V \quad \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = 6V$

$R_1 = 2\,\Omega \quad R_2 = 4\,\Omega$

$$i_2 = -i_3 \left(2R_1 / R_2 \right) = -0.25A \qquad i_1 = -i_3 \frac{2R_1 + R_2}{R_2} = -0.5A$$

Problema 27.3

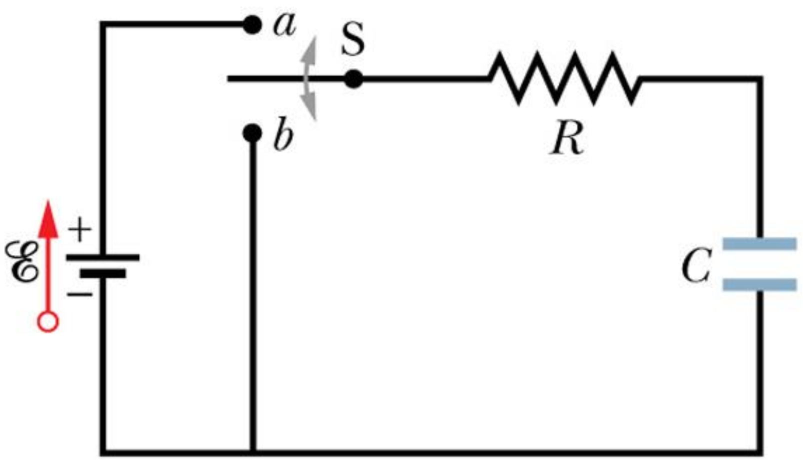




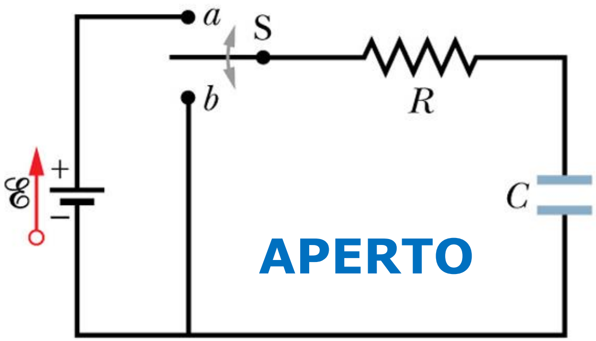
- ✓ Abbiamo ottenuto segni negativi per i_1 e i_2 : ciò significa che il verso delle correnti positive è opposto a quanto ipotizzato
- ✓ Ciò era preventivabile considerando che le batterie 2 e 3 hanno f.e.m. maggiore della 1, dunque tendono ad imporre il verso di percorrenza stabilito dai suoi poli

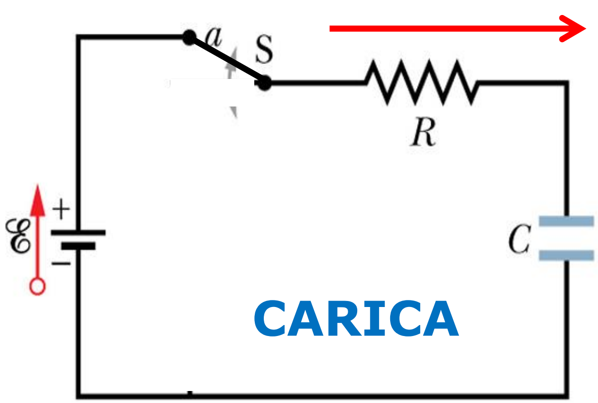
Il Circuito RC:

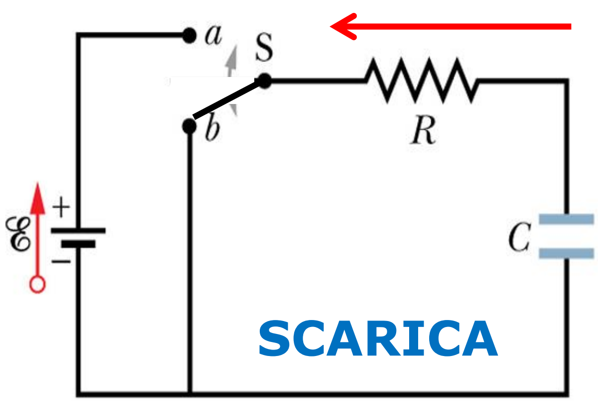
- ✓ Finora abbiamo considerato **circuiti in condizioni stazionarie**, ovvero circuiti le cui grandezze fondamentali (correnti, d.d.p., cariche sui piatti del condensatore) **sono costanti nel tempo**
- ✓ In realtà per molti circuiti d'interesse pratico, queste **grandezze sono variabili nel tempo**; **il circuito RC nelle fasi transienti di carica e scarica del condensatore** è un esempio di circuito non stazionario
- ✓ Il circuito RC contiene, oltre alla batteria, uno o più condensatori ed una o più resistenze; consideriamo il caso più semplice, in figura, con una resistenza e un condensatore inizialmente scarico; attraverso l'interruttore S il condensatore può essere posto in contatto con i poli della batteria



Il Circuito RC:



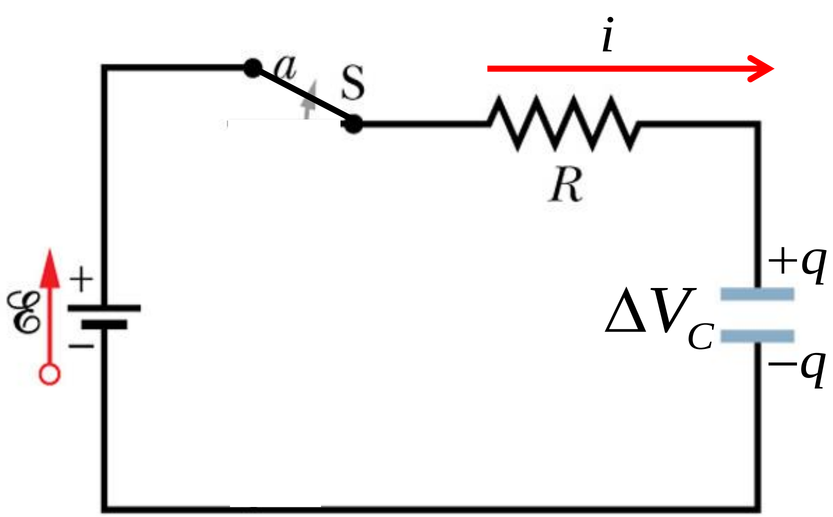




- ✓ **Fase di carica**: mettiamo in contatto l'interruttore S col punto *a*: la batteria inizia a trasferire carica al condensatore, finché la d.d.p. ΔV tra i piatti del condensatore non eguaglia la f.e.m. della batteria
- ✓ **Condensatore totalmente carico**: a carica completata la corrente cessa: il condensatore carico interrompe il flusso della corrente
- ✓ **Fase di scarica**: scarichiamo il condensatore collegando S col punto b: si genera una corrente nella maglia chiusa che dissipa l'energia del condensatore sulla resistenza R

Processo di carica del condensatore

- ✓ In ogni istante durante il processo di carica, le equazioni della corrente sono date dalle stesse leggi di Kirchoff; la differenza rispetto al caso statico è che **tutte le grandezze sono variabili nel tempo**
- ✓ sia q(t) la carica, ΔV_C(t) la d.d.p. ai piatti del condensatore, ed i(t) la corrente nel circuito. Si ha:



$$\mathscr{E} = i(t)R + \Delta V_C(t)$$

- ✓ Il processo di carica continua fin quando ΔV_C diventa uguale alla f.e.m.; a quel punto l'equazione ci dà $i(t)=0$

- ✓ Riscriviamo l'equazione sostituendo $\Delta V_C(t)$ e $i(t)$ con la loro espressione in termini di carica:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \qquad \Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt}R + \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}$$

Questa equazione differenziale del 1° ordine descrive la variazione di carica ai piatti del condensatore

Soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dq(t)}{dt}R + \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E} \qquad (1)$$

Possiamo dimostrare che la soluzione è data da:

$$q(t) = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \qquad \Rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathscr{E}}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Sostituiamo le espressioni della carica e della corrente nell'equazione (1) e verifichiamo che l'equazione (1) è soddisfatta:

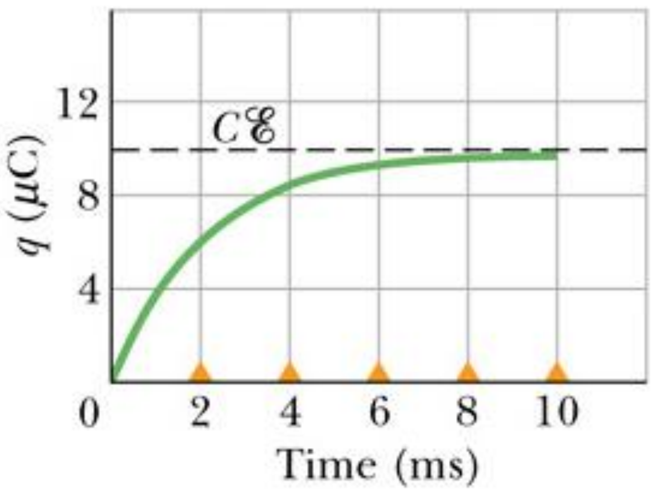
$$\frac{RC\mathscr{E}}{\tau}e^{-t/\tau} + \mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = \mathscr{E} \qquad \Rightarrow \frac{RC}{\tau}e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \tau = RC$$

L'equazione (1) è soddisfatta se la costante τ ("tau") nell'esponenziale è uguale al prodotto *RC;* τ è detta **costante di tempo caratteristica**: infatti, si può verificare che essa ha la dimensione fisica del tempo:

$$[RC] = \Omega F = \frac{V}{A}\frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

Processo di carica del condensatore

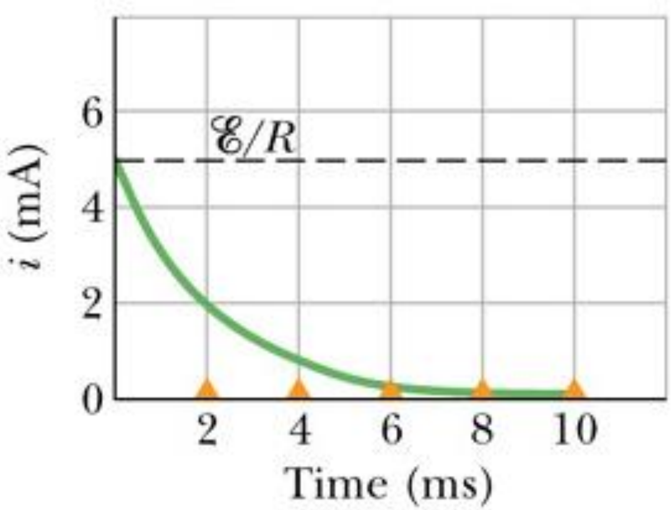
Grafico della carica sui piatti in funzione del tempo



$$q(t) = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

all'istante iniziale (t=0) q=0; la **carica aumenta esponenzialmente col tempo**, e dopo un tempo $t >> \tau$ raggiunge il **valore di equilibrio** $q = C\mathscr{E}$; a questo punto il condensatore è totalmente carico

Grafico della corrente in funzione del tempo



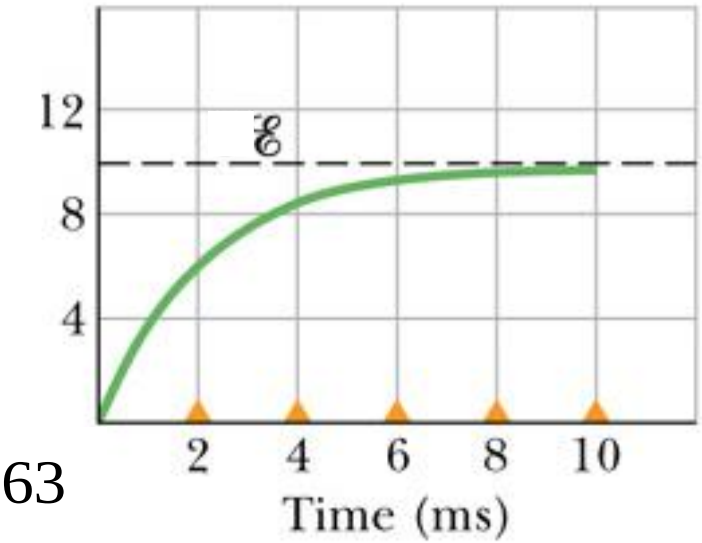
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

all'instante iniziale $i(0) = \mathscr{E}/R$; la **corrente diminuisce esponenzialmente nel tempo**; per t $>> \tau$ il condensatore è totalmente carico e la corrente si annulla

Processo di carica del condensatore

Grafico della d.d.p. tra i piatti in funzione del tempo

$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$



A t=0 il condensatore è scarico e $\Delta V_C = 0$;
per $t >> \tau$ il condensatore è totalmente carico e $\Delta V_C = \mathscr{E}$

nell'istante $t = \tau$: $\Delta V_C(\tau) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-1}\right] = \mathscr{E} \times 0.63$

nell'istante $t = 2\tau$: $\Delta V_C(2\tau) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-2}\right] = \mathscr{E} \times 0.86$

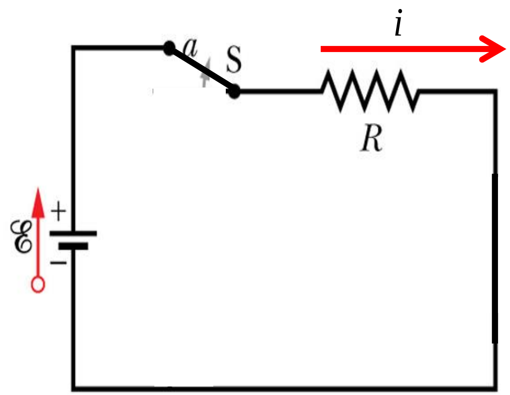
nell'istante $t = 3\tau$: $\Delta V_C(3\tau) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-3}\right] = \mathscr{E} \times 0.95$

Per t = τ il condensatore è al 63% del caricamento totale, per t = 2τ all' 86%, per t = 3τ al 95%; dunque τ rappresenta **l'ordine di grandezza del tempo necessario al condensatore per caricarsi completamente**; ad esempio per C=1 μF ed R =1 KΩ si ottiene:

$$\tau = RC = 1k\Omega \times 1\mu F = 10^{-3} s$$

Riepilogo: carica del condensatore

- ✓ **All'istante iniziale** t=0 il condensatore si comporta come un **filo conduttore con resistenza trascurabile** (*circuito chiuso*): carica e d.d.p. ai piatti sono nulle, e la corrente è uguale a quella del circuito privo di condensatore

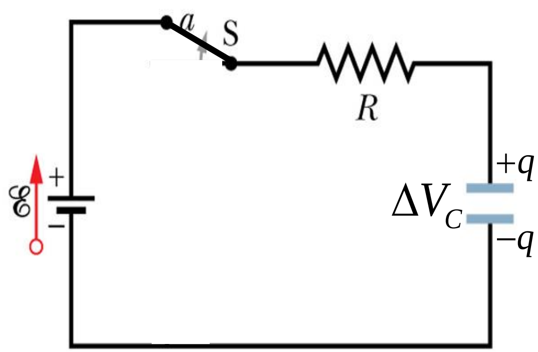


$$q(0) = 0$$

$$\Delta V_C(0) = 0$$

$$i(0) = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

- ✓ Al **termine del processo di carica** (nel tempo lungo) il condensatore è come un **filo tagliato** (*circuito aperto*): la corrente si interrompe, la d.d.p. ai piatti è uguale alla f.e.m. della batteria, la carica ai piatti è determinata dalla capacità

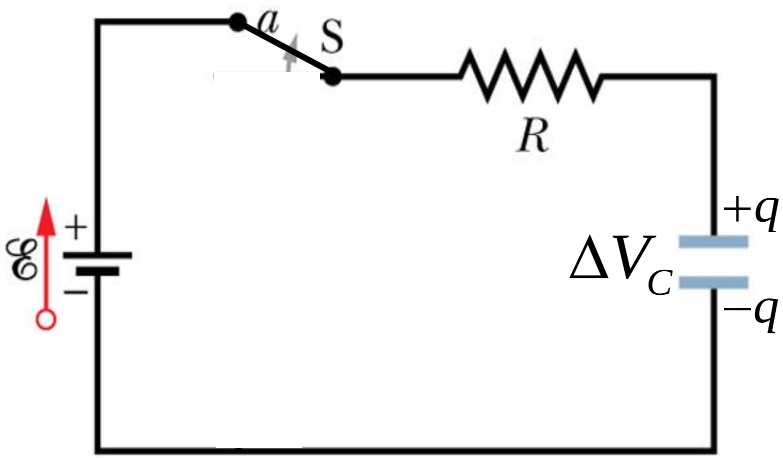


$$q(\infty) = C\mathscr{E}$$

$$\Delta V_C(\infty) = \mathscr{E}$$

$$i(\infty) = 0$$

Circuito RC: bilancio energetico



A carica completata, il bilancio energetico impone che **l'energia erogata dalla batteria durante la carica** ΔU_B sia **uguale all'energia immagazzinata dal condensatore** ΔU_C più quella ΔU_R **dissipata sul resistore *R***; verifichiamo questo assunto

L'energia erogata dalla batteria è data dal prodotto della carica circolata nel circuito per la f.e.m. della batteria; la carica *q* circolata nel circuito durante il processo è ovviamente la stessa accumulata sui piatti del condensatore:

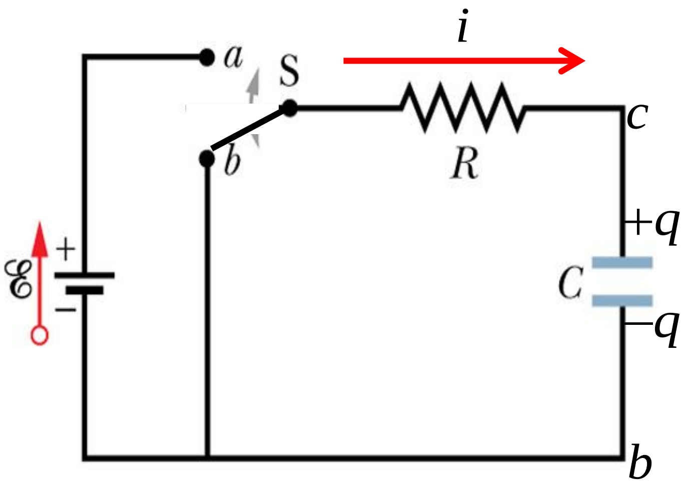
$$\Delta U_B = q\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2 \qquad \Delta U_C = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2 \qquad q = C\mathscr{E}$$

Dalla legge di Joule calcoliamo l'energia dissipata sul resistore:

$$P = i^2 R = \frac{dU_R}{dt} \Rightarrow \Delta U_R = \int_0^\infty i^2(t)\,R\,dt = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\,dt = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2$$

$$\Rightarrow \Delta U_B = \Delta U_C + \Delta U_R$$

Processo di scarica del condensatore



Partiamo dal condensatore carico, con carica iniziale $q_0 = C\mathcal{E}$

Chiudiamo il circuito in modo che il condensatore scarichi la sua energia sul resistore *R*; ipotizziamo il verso della corrente in figura; la 2° legge di Kirchoff dà:

$$(V_b - V_c) + (V_c - V_b) = 0 \Rightarrow iR + \Delta V_C = 0 \quad \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} R + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Si dimostra che la soluzione dell’equazione differenziale è:

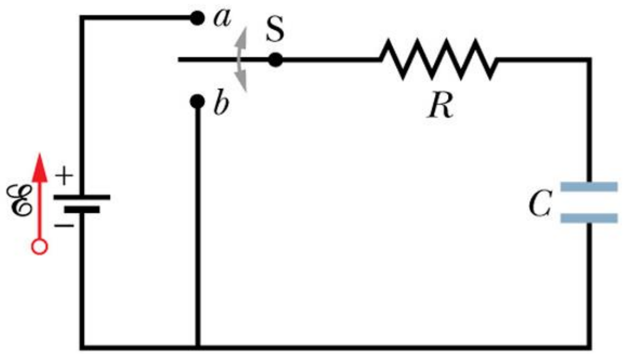
$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \qquad i(t) = dq/dt = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \tau = RC$$

Dunque carica e corrente diminuiscono esponenzialmente col tempo; per t = τ il condensatore si è scaricato del 37%:

$$q(\tau) = q_0 e^{-1} = 0.37 q_0$$

Problema

- ✓ Consideriamo un circuito RC costituito da un condensatore di capacità C = 5 μF, ed una resistore R=10 kΩ; il circuito viene connesso ad una batteria di f.e.m. uguale a 12 V; calcolare:
- ✓ La costante di tempo τ caratteristica del circuito
- ✓ La corrente nel circuito all'istante di chiusura (*t*=0)
- ✓ La d.d.p. e la carica ai piatti del condensatore all'istante *t* = τ/2
- ✓ La corrente nel circuito all'istante *t* = τ/2
- ✓ L'istante in cui la d.d.p. ai piatti raggiunge il valore *ΔV*= 5 V



$$\tau = RC = 10\,K\Omega \times 5\mu F = 50\,ms$$

$$i(0) = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12V}{10\,K\Omega} = 1.2\,mA$$

$$\Delta V_C(\tau/2) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-1/2}\right] = 12V\left[1 - 0.606\right] = 4.72V$$

$$q(\tau/2) = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-1/2}\right] = 5\mu F \times 4.72V = 23.61\mu C$$

$$i(\tau/2) = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-1/2} = 1.2\,mA \times 0.606 = 0.72\,mA$$

Problema

- ✓ Infine dobbiamo determinare l'istante *t* per il quale:

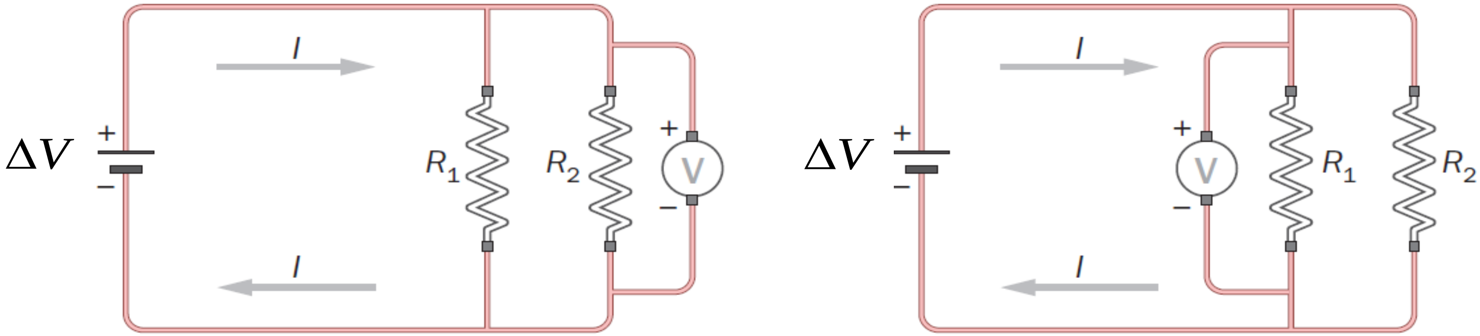
$$\Delta V_C(t) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = 5V$$

- ✓ Invertiamo l'equazione e troviamo t:

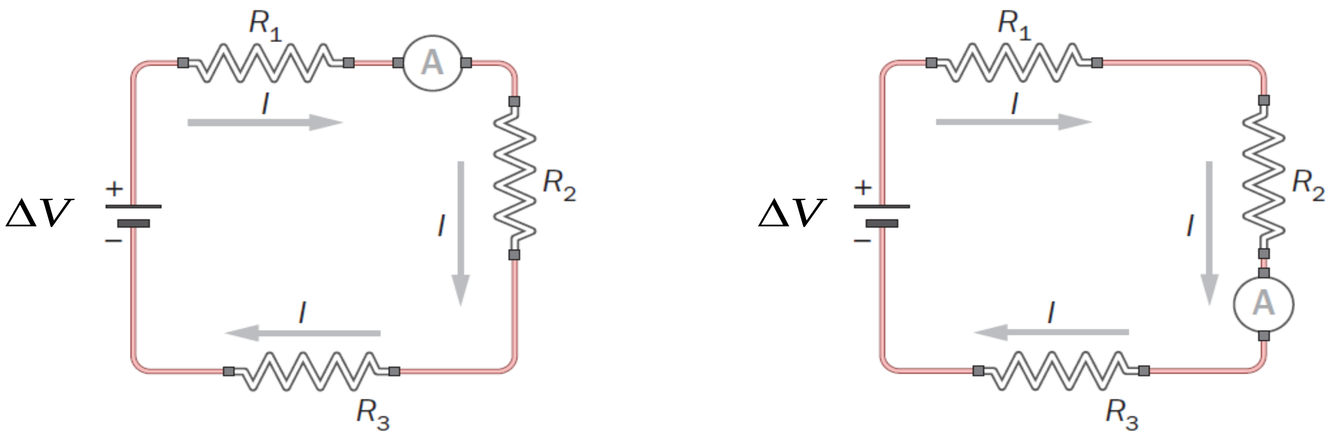
$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{\Delta V_C(t)}{\mathscr{E}} \quad \Rightarrow e^{-t/\tau} = 1 - \frac{\Delta V_C(t)}{\mathscr{E}} \quad \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{\Delta V_C(t)}{\mathscr{E}}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - \frac{\Delta V_C(t)}{\mathscr{E}}\right) = -50\,ms \times \ln\left(1 - \frac{5}{12}\right) = 26.95\,ms$$

Voltmetro e amperometro



La **d.d.p. si misura col voltmetro**; questo deve essere **inserito in parallelo**, collegando i poli del voltmetro ai capi del circuito tra i quali si vuole misurare la d.d.p.



L'intensità di corrente si misura con l'amperometro; questo deve essere inserito **in serie con il tratto di circuito** di cui si vuole misurare la corrente. L'amperometro deve essere attraversato dalla corrente che si vuole misurare, per cui si deve interrompere il circuito e inserire lo strumento

Voltmetro e amperometro

Anche **amperometro e voltmetro hanno una loro resistenza interna**, la quale non deve alterare i valori da misurare, per cui:

✓ **l'amperometro, in serie nel circuito, deve avere una resistenza piccola e trascurabile**

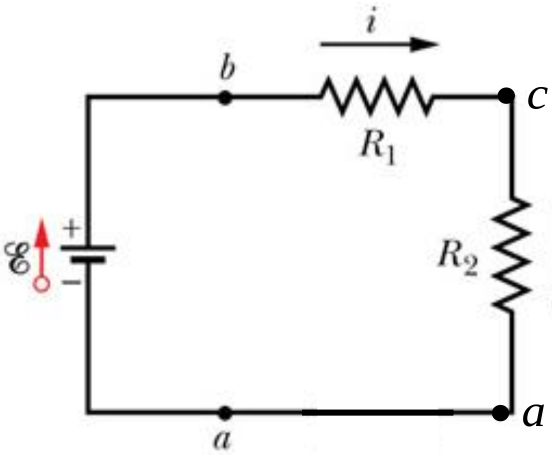
✓ **il voltmetro, in parallelo, deve avere una resistenza più grande possibile**

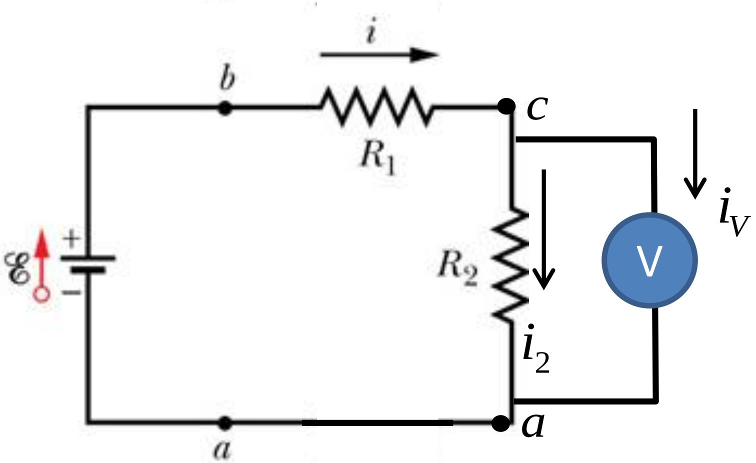
✓ **NON collegare un voltmetro in serie:** la sua grande resistenza interna impedirebbe alla corrente di scorrere, interrompendo il circuito

✓ **MAI usare un amperometro in parallelo:** potrebbe causare un cortocircuito e bruciare il circuito elettrico.

Gli strumenti più diffusi sono chiamati **multimetri** o **tester**; essi misurano d.d.p., corrente e resistenza. Un multimetro presenta due poli o morsetti, i quali devono essere collegati al circuito elettrico.
Quando si misurano grandezze continue si deve rispettare la polarità dei morsetti. Per convenzione, il *polo positivo viene collegato con il cavetto di colore rosso, quello negativo con il cavetto di colore nero.*

Esercizio





Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathcal{E} = 12V \quad R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 4\Omega$$

1) calcolare la d.d.p. ai capi di R_2

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 2A$$

$$\Delta V_2 = i\, R_2 = 8V$$

2) Connettiamo un voltmetro in parallelo alla resistenza R_2; sia R_V = 400 Ω la **resistenza interna del voltmetro**; calcolare la d.d.p. ai capi di R_2 misurata dal voltmetro

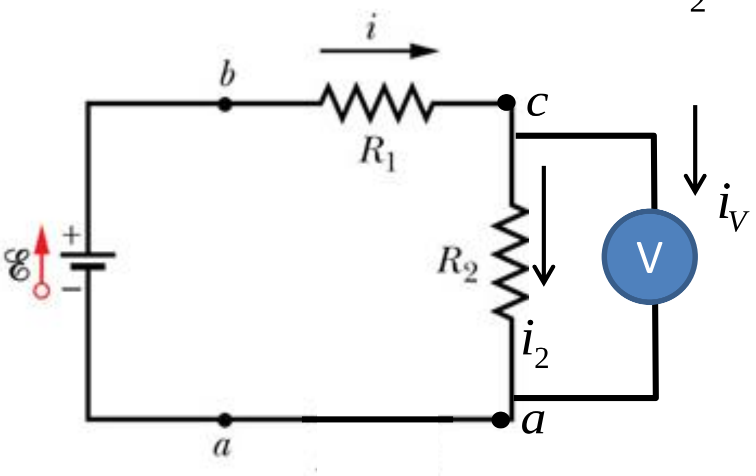
A causa della resistenza non infinita del voltmetro, una porzione di corrente i_V passa attraverso il ramo del voltmetro, variando quindi la d.d.p. ai capi di R_2

Esercizio

$$\mathscr{E}_1 = 12V \quad R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 4\Omega$$

Calcoliamo la resistenza equivalente del parallelo R_2 ed R_V :

$$R_{2V} = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = \frac{1600\,\Omega^2}{404\,\Omega} = 3.96\,\Omega \qquad R_{12V} = 5.96\,\Omega$$



la corrente nel circuito:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{12V}} = 2.013A$$

La d.d.p. tra i punti *c* ed *a* è quindi

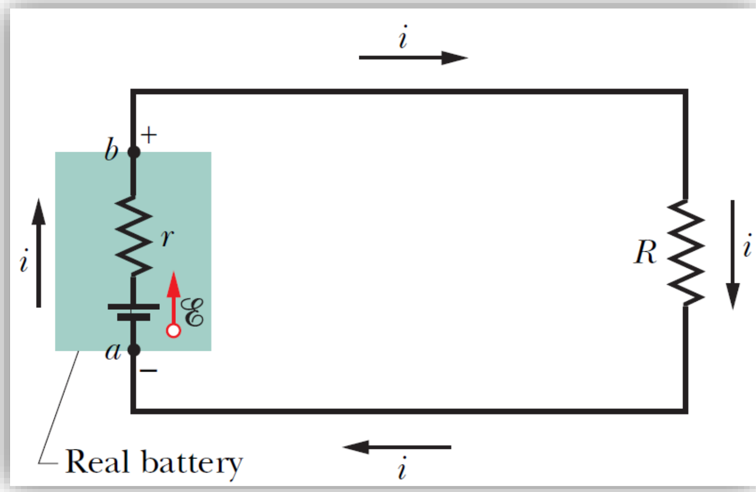
$$\Delta V_{2V} = i\,R_{2V} = 7.97V$$

Il rapporto tra d.d.p. con voltmetro inserito e senza voltmetro è:

$$\frac{\Delta V_{2V}}{\Delta V_2} = \frac{7.97V}{8V} = 0.9966$$

Dunque l'inserimento del voltmetro ha ridotto la d.d.p. di circa lo 0.3%

Batterie ideali e reali



- Le **batterie ideali** sono caratterizzate dalla sola forza elettromotrice
- In realtà, come qualsiasi componente del circuito, **anche la batteria possiede una sua resistenza interna**
- La resistenza interna di una batteria reale (indicata con *r* in figura) deve essere **inclusa come un elemento in serie col resto del circuito**

- Applicando Kirchoff al circuito in figura, otteniamo la corrente:

$$\mathscr{E} = i\,r + i\,R \qquad \Rightarrow i = \frac{\mathscr{E}}{r+R}$$

- Notiamo che in una batteria reale la f.e.m. $\mathscr{E}$ è una **caratteristica propria della batteria**, mentre la d.d.p. misurata ai poli della batteria è:

$$V_b - V_a = \mathscr{E} - i\,r$$

che chiaramente **dipende anche dalla corrente, e dunque dal 'carico'** R presente nel circuito; in altri termini la **f.e.m. è la d.d.p. statica, misurata nella condizione di circuito aperto**

Resistenza e capacità equivalente: Tabella riassuntiva

Serie	Parallelo
Condensatori	
$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$	$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$
Stessa carica in tutti i condensatori	Stessa differenza di potenziale ai capi di tutti i condensatori

Serie	Parallelo
Resistenze	
$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$
Stessa corrente attraverso tutte le resistenze	Stessa differenza di potenziale ai capi di tutte le resistenze